APLICACIÓN DEL TEOREMA DE STONE A LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER CON POTENCIAL VARIABLE

CARLOS ALBERTO MUÑOZ ALVEAR

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI
2017

CARLOS ALBERTO MUÑOZ ALVEAR

Trabajo de grado presentado como requisito
para optar al título de Matemático.

Director:
JUAN CARLOS MUÑOZ GRAJALES PH.D

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI
2017

Contenido

A mi hijo Juan Sebastian quien es el motor de mi vida, a mis padres y hermanos que son mi apoyo incondicional

Introducción

El objetivo de este trabajo es estudiar la existencia y unicidad al caso del problema de valor inicial asociado a la ecuación de Schrödinger lineal no estacionaria, con potencial variable $V = V(x)$,

$$\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} - V(x)u, \tag{1}$$

con $u = u(x,t)$, $u(x,0) = u_0(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ y $t \in \mathbb{R}$. Para tal propósito, se introduce la teoría de los semigrupos fuertemente continuos de operadores lineales acotados en espacios de Banach y algunos teoremas de la teoría de perturbación, y en particular, el teorema de Stone [3], tomando como referencia principal los textos [1, 2]. En general, la teoría de semigrupos puede ser utilizada para resolver una gran clase de problemas, comúnmente conocidos como ecuaciones de evolución. Estos tipos de ecuaciones aparecen en muchas disciplinas, incluyendo física, química, biología, ingeniería y economía, entre otras. El interés en la ecuación de Schrödinger no estacionaria con potencial variable, viene de sus múltiples aplicaciones, como por ejemplo, en la mecánica cuántica [9], donde la ecuación de Schrödinger es un modelo que describe la evolución en el tiempo del estado cuántico de un sistema bajo la acción de un potencial dado, el cual, en muchas aplicaciones físicas es una función de la variable x. Esta ecuación fue formulada a finales de 1925 y publicado en 1926 por el físico austriaco Erwin Schrödinger [8].

Un concepto importante presentado en este trabajo, es el de operador auto-adjunto [4]. Los operadores auto-adjuntos se utilizan en el análisis funcional y la mecánica cuántica. En la mecánica cuántica los conceptos físicos como la posición, el momento, el momento angular y el giro están representados por operadores auto-adjuntos en un espacio de Hilbert.

El propósito es realizar un trabajo monográfico, haciendo un estudio matemático del problema, entendiendo y exponiendo con detalle los resultados y la teoría empleada para el estudio de la ecuación con las características mencionadas, y proporcionando donde es posible, ejemplos de los conceptos necesarios. Es muy importante destacar que si la función potencial V es constante, el problema (1) puede resolverse explícitamente usando solamente la transformada de Fourier. Sin embargo, hay una mayor dificultad cuando la función $V(x)$ que describe el potencial depende de la variable x, pues ya la transformada de Fourier no es suficiente para resolver el problema. La dificultad es resuelta introduciendo conceptos y teoría del Análisis Funcional, tales como, operador lineal acotado y no acotado, teoría de semigrupos, teorema de Hille-Yosida, teorema de Lumer-Phillips, y teorema de Stone, entre otros, para poder abordar el problema (1). Esta es la motivación de incluir estos temas en los capítulos 1 y 2 del presente trabajo.

Se ha dividido el trabajo en cuatro capítulos. En el primer capítulo se proporcionan algunas definiciones y propiedades de los operadores lineales en espacios normados, además, se introduce la noción de semigrupo, enfatizando el estudio en los llamados semigrupos fuertemente continuos o C_0-semigrupos. En el desarrollo de este capítulo se hace una demostración detallada del teorema de Hille-Yosida [1], que caracteriza a los C_0-semigrupos en espacios de Banach. Este resultado proporciona condiciones necesarias y suficientes para que un operador lineal sea un generador de un C_0-semigrupo. Para el caso especial de los semigrupos de contracción se demuestra el teorema de Lumer-Phillips [1, 6], el cual permite determinar cuándo un operador disipativo genera un C_0-semigrupo. En el segundo capítulo se generaliza la definición de semigrupo a la definición de grupo de operadores lineales acotados, con el fin de proporcionar una demostración del teorema de Stone para grupos de operadores unitarios. En el tercer capítulo se proporciona una aplicación de la teoría de semigrupos, demostrando la existencia y unicidad de la solución del problema de valor inicial asociado a la ecuación de Schrödinger con potencial variable, donde se utiliza esencialmente el teorema de Stone. Finalmente, en el cuarto capítulo se dan algunas conclusiones de los aspectos más relevantes del trabajo.

Capítulo 1

Preliminares

Consideremos la ecuación diferencial lineal escalar dada por

$$u' = au, \tag{1.1}$$

donde $a \in \mathbb{R}$. Es bien sabido que $u(t) = e^{at}k$, $t \in \mathbb{R}$ es la única solución de la ecuación (1.1) que satisface la condición inicial $u(0) = k$. Generalizando un poco más lo anterior a un sistema de ecuaciones diferenciales lineales, podemos considerar la ecuación diferencial

$$\mathbf{u}' = A\mathbf{u}, \tag{1.2}$$

con $A = (a_{ij})_{n\times n}$ una matriz de entradas reales. Para cada punto $\vec{k} \in \mathbb{R}^n$, existe una única solución de (1.2) que satisface la condición inicial $\mathbf{u}(0) = \vec{k}$. Es bien conocido que esta solución se puede dar explícitamente como $\mathbf{u}(t) = e^{At}\vec{k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}\vec{k}$, $t \in \mathbb{R}$.
El paso siguiente en la generalización del problema de valor inicial (1.2), corresponde a considerar el caso en que A es una aplicación lineal en un espacio de dimensión infinita. Un ejemplo de tal situación más general es la que nos ocupa en el presente trabajo. En efecto, observe que la ecuación de Schödinger con potencial variable (1) puede escribirse de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au, \tag{1.3}$$

con $A = i\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} - iV$. Como se puede observar, la ecuación (1.3) tiene una forma similar a las ecuaciones (1.1) y (1.2), pero su estudio teórico requiere herramientas más elaboradas del Análisis funcional, tales como, teoría de operadores lineales acotados y no acotados, los conceptos de semigrupo y grupo de operadores lineales, generador inifinitesimal de un semigrupo, operador adjunto, operador resolvente, y teoremas de perturbación de semigrupos, entre otros. Como se mencionó antes, la mayor dificultad en el estudio de las soluciones de la ecuación (1.3) reside en la presencia del potencial $V(x)$ cuando éste depende de la variable x. En este capítulo, haremos una revisión de estas herramientas fundamentales basada esencialmente en los textos [4] y [1].

1.1. Operadores lineales

En esta sección, se introduce el concepto de operador lineal, el cual es una herramienta muy importante en el área de Análisis y Ecuaciones Diferenciales Parciales, como se mencionó anteriormente. Denotaremos en general con el símbolo $\|\cdot\|$ a la norma de un espacio lineal normado X.

Definición 1.1.1 *Sean X y Y espacios vectoriales sobre un mismo campo escalar $\mathbb{K}$. Una función $T : X \to Y$ es llamada aplicación lineal si, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $x, y \in X$,*

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y). \tag{1.4}$$

El conjunto de todas las aplicaciones lineales $T : X \to Y$ se denotará por $L(X, Y)$ con la suma y multiplicación por escalar definidas por $(T + S)(x) = T(x)+S(x)$, $(\alpha T)(x) = \alpha T(x)$, para todo $x \in X$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. El conjunto $L(X, Y)$ es un espacio vectorial.

Ejemplo 1.1.2 *Sea A una matriz de orden $m \times n$. Entonces la aplicación $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ definida por $Tx = Ax$, $x \in \mathbb{R}^m$ es un ejemplo de operador lineal en dimensión finita.*

Ejemplo 1.1.3 *Un operador que se usa frecuentemente en matemáticas es el que toma la derivada de una función, el cual se denota frecuentemente como $\frac{d}{dx}$, D, D_x, para tomar la primera derivada con respecto a una variable x. Si f y g son funciones diferenciables, es bien conocido que este operador satisface*

$$D(f + g) = (Df) + (Dg) \quad y \quad D(af) = a(Df),$$

es decir, es un operador lineal.

Ejemplo 1.1.4 *Dados $a < b$, el operador integral definido por*

$$I(f) := \int_a^b f(x)dx,$$

para f una función Riemann integrable, es también un operador lineal.

Definición 1.1.5 *Sean X y Y espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $T \in L(X, Y)$. Se define el núcleo(Ker) y la imagen(Im) de T así:*

$$Ker(T) = \{x \in X : T(x) = 0_Y\},$$

$$Im(T) = \{y \in Y : T(x) = y, \text{ para algún } x \in X\}.$$

Definición 1.1.6 *Sean X y Y espacios lineales normados y $T : X \to Y$ un operador lineal. Se dice T es acotado si existe un número real positivo k tal que $\|T(x)\| \leq k\|x\|$, para todo $x \in X$. El conjunto de todos los operadores lineales acotados de un espacio lineal X en un espacio lineal Y lo denotaremos por $B(X, Y)$.*

Sea $T \in B(X; Y)$. Es fácil demostrar que

$$\|T\| = sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\}, \tag{1.5}$$

define una norma en $B(X, Y)$. Para más detalles referimos al lector a [4]. Observe que si $T \in B(X, Y)$, entonces

$$\|T\| = sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\} = inf\{k : \|T(x)\| \leq k\|x\| \text{ para todo } x \in X\},$$

y así tenemos que, $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$ para todo $x \in X$.

Teorema 1.1.7 *Sean X y Y espacios lineales normados y $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) T es una aplicación uniformemente continua;

(b) T es una aplicación continua;

(c) T es una aplicación continua en 0;

(d) existe un real positivo k tal que $\|T(x)\| \leq k$ con $x \in X$ y $\|x\| \leq 1$;

(e) existe un real positivo k tal que $\|T(x)\| \leq k\|x\|$ para todo $x \in X$.

Demostración. *Las implicaciones (a) $\implies$ (b) y (b) $\implies$ (c) se tienen de manera inmediata. Solo se requiere demostrar que (c) $\implies$ (d), (d) $\implies$ (e) y (e) $\implies$ (a).*
(c) $\implies$ (d). Dado que T es una aplicación continua en 0, tomando $\varepsilon = 1$ existe $\delta > 0$ tal que $\|T(x)\| < 1$ con $x \in X$ y $\|x\| < \delta$. Sea $w \in X$ con $\|w\| \leq 1$. Como

$$\|\frac{\delta w}{2}\| = \frac{\delta}{2}\|w\| \leq \frac{\delta}{2} < \delta,$$

$\|T(\frac{\delta w}{2})\| < 1$ y puesto que T es una aplicación limeal, entonces $T(\frac{\delta w}{2}) = \frac{\delta}{2}T(w)$. Luego $\frac{\delta}{2}\|T(w)\| < 1$ y así $\|T(w)\| < \frac{2}{\delta}$. Por lo tanto la condición (d) se tiene con $k = \frac{2}{\delta}$.
(d) $\implies$ (e). Sea k tal que $\|T(x)\| \leq k$ para todo $x \in X$, y $\|x\| \leq 1$. Dado que $T(0) = 0$ es claro que $\|T(0)\| \leq k\|0\|$. Sea $x \in X$ con $x \neq 0$. Como $\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1$ se tiene que $\left\|T\big(\frac{x}{\|x\|}\big)\right\| \leq k$. Dado que T es una aplicación lineal

$$\frac{1}{\|x\|}\|T(x)\| = \left\|\Big(\frac{1}{\|x\|}\Big)T(x)\right\| = \left\|T\Big(\frac{x}{\|x\|}\Big)\right\| \leq k,$$

y por lo tanto $\|T(x)\| \leq k\|x\|$.
(e) $\implies$ (a). Como T es una aplicación lineal,

$$\|T(x) - T(y)\| = \|T(x-y)\| \leq k\|x-y\|,$$

para todo $x, y \in X$. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$. Entonces si $x, y \in X$ y $\|x-y\| < \delta$

$$\|T(x) - T(y)\| \leq k\|x-y\| < k\Big(\frac{\varepsilon}{k}\Big) < \varepsilon.$$

Por lo tanto T es uniformemente continua.

$\square$

Ejemplo 1.1.8 *Sea $C_{\mathbb{R}}([0,1])$ el conjunto de las funciones continuas y acotadas de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$ y definimos la aplicación lineal $T : C_{\mathbb{R}}([0,1]) \to \mathbb{R}$, tal que*

$$T(f) = f(0).$$

Considerando $\|f\| = sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$, entonces si $f \in C_{\mathbb{R}}([0,1])$, se tiene que

$$|T(f)| = |f(0)| \leq sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\} = \|f\|,$$

y por lo tanto tomando $k = 1$ en la definición (1.1.6), se sigue que T es un operador acotado y por el teorema (1.1.7) es también una aplicación continua.

Ejemplo 1.1.9 *Sea $C(\mathbb{R})$ el espacio de las funciones uniformente contínuas y acotadas en $\mathbb{R}$, con la norma*

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|.$$

Para cada $t \geq 0$ y $f \in C(\mathbb{R})$ definimos $T(t) : C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ por

$$(T(t)f)(x) := f(x+t) = f_t(x), \quad t > 0. \tag{1.6}$$

Si $f \in C(\mathbb{R})$ es inmediato que $f_t \in C(\mathbb{R})$. Veamos que $T(t)$, es una aplicación lineal acotada para cada $t > 0$. En efecto, si $f, g \in C(\mathbb{R})$, entonces

$$\begin{aligned}(T(t)(f+g))(x) &= (f+g)(x+t) = f(x+t) + g(x+t)\\ &= (T(t)f)(x) + (T(t)g)(x),\end{aligned}$$

y también,

$$\begin{aligned}(T(t)(\alpha f))(x) &= (\alpha f)(x+t) = \alpha f(x+t)\\ &= \alpha(T(t)f)(x).\end{aligned}$$

Luego, $T(t)$ es un operador lineal. Ahora, dado que

$$\|T(t)f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x+t)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = \|f\|, \tag{1.7}$$

se tiene que $T(t)$ es acotado, tomando $k = 1$ en la definición (1.1.6).

Ejemplo 1.1.10 *Sea $\mathcal{P}[0,1]$ el espacio de los polinomios sobre $[0,1]$. El operador derivada $D : \mathcal{P}[0,1] \to \mathcal{P}[0,1]$, tal que $Df = f'$, no es acotado con la norma*

$$\|f\| := \text{máx}\ \{|f(x)|, x \in [0,1]\}.$$

En efecto, considerando la sucesión $f_n(x) = x^n$ se tiene que $\|f_n\| = 1$, pero

$$\|Df_n(x)\| = n\|x^{n-1}\| = n \to \infty \quad si \quad n \to \infty$$

Ahora se considera un tipo de operadores cuya norma se puede encontrar con facilidad.

Definición 1.1.11 *Sean X y Y espacios lineales normados y $T \in L(X,Y)$. Decimos que T es una isometría si $\|T(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in X$.*

Ejemplo 1.1.12 *El operador $T(t)$ definido en el ejemplo* (1.1.9) *es una isometría para cada $t > 0$, dado que por* (1.7) *se tiene que $\|T(t)f\| = \|f\|$.*

Definición 1.1.13 *Sean X, Y y Z espacios lineales normados con $T \in B(X,Y)$ y $S \in B(Y,Z)$. la composición $S \circ T$ de S y T se denotara por ST y se denominara el producto de de S con T.*

Si los espacios X, Y y Z no son los mismos, el hecho de que se pueda definir el producto de ST no garantiza que se pueda definir el producto TS. Sin embargo, si $X = Y = Z$ entonces TS y ST están bien definidos. Observe que incluso si los espacios son de dimensión finita y $X = Y = Z$, en general $TS \neq ST$.

Si X es un espacio linear normado entonces en conjunto $B(X,X)$ de operadores lineales acotados de X en X lo denotaremos por $B(X)$, además si $T \in B(X)$ el producto de T con sigo mismo n veces sera denotado por T^n.

Teorema 1.1.14 *Si X, Y y Z son espacios lineales normados con $T \in B(X,Y)$ y $S \in B(Y,Z)$ entonces $ST \in B(X,Z)$ y*

$$\|ST\| \leq \|S\|\|T\|. \tag{1.8}$$

Demostración. *De acuerdo a la definición de aplicación lineal se tiene de manera inmediata que $ST \in B(X,Z)$ y puesto que*

$$\|(ST)(x)\| = \|S(T(x))\| \leq \|S\|\|T(x)\| \leq \|S\|\|T\|\|x\|, \tag{1.9}$$

entonces $ST \in B(X,Z)$ y $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$.

□

Definición 1.1.15 *Sea X un espacio lineal normado. Un operador $T \in B(X)$ es invertible si existe $S \in B(X)$ tal que $ST = I = TS$.*

El elemento $S \in B(X)$ tal que $ST = I = TS$, es llamado el *inverso* de T y se denotara por T^{-1}.

1.1.1. Espacios de Banach y espacios de Hilbert

Una clase de espacios normados, muy importantes para el desarrollo teórico de ete trabajo, son los denominados espacios de Banach y espacios de Hilbert.

Definición 1.1.16 *Un espacio de Banach es un espacio vectorial normado y completo con la métrica inducida por su norma, es decir, es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales o complejos con una norma* $\|\cdot\|$*, tal que toda sucesión de Cauchy tiene un límite en el espacio.*

Ejemplo 1.1.17 *Dos ejemplos fundamentales de espacio de Banach de dimensión finita son* $\mathbb{R}^n$ *y* $\mathbb{C}^n$*.*

Ejemplo 1.1.18 *Un espacio de gran importancia para este trabajo es el espacio* $L^p(\mathbb{R}^n)$*. Se define para* $p \geq 1$ *el conjunto* $L^p(\mathbb{R}^n)$*, o simplemente denotado por* L^p*, como*

$$L^p(\mathbb{R}^n) = \left\{ u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \mid \;\; u \text{ es medible y} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

Se puede demostrar que

$$\|u\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

define una norma, con la cual el espacio lineal $L^p(\mathbb{R}^n)$ *resulta ser un espacio de Banach.*

Definición 1.1.19 *Sea* X *un espacio vectorial sobre un cuerpo* $\mathbb{K}$*. Un producto interno en* X *es una función* $(\;,\;) : X \times X \to \mathbb{K}$*, tal que para todo* $x, y, z \in X$ *y* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$*,*

a) $(x, x) \geq 0$*,*

b) $(x, x) = 0$ *si y sólo si* $x = 0$*,*

c) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$*,*

d) $(x, y) = \overline{(y, x)}$*.*

Ejemplo 1.1.20 *La función (,) : $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ definida por $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$, es un producto interno en $\mathbb{C}^n$. La prueba de esto es un ejercicio rutinario que se hace usando las propiedades elementales de los conjugados complejos.*

Definición 1.1.21 *Un espacio lineal H con producto interno (,) que es completo con respecto a la norma inducida por el producto interno es llamado un espacio de Hilbert.*

Ejemplo 1.1.22 *Los espacios $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ son espacios de Hilbert con el producto escalar dado en el ejemplo* (1.1.20).

Ejemplo 1.1.23 *Es sabido que además de $L^2(\mathbb{R}^n)$ ser un espacio de Banach, también es un espacio de Hilbert con el producto escalar definido por*

$$(u, v) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\overline{v(x)}dx.$$

1.1.2. La transformada de Fourier

Para una función $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, la transformada de Fourier de u está definida como

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \widehat{u}(\xi) = (2\pi)^{-(n/2)} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} u(x)dx,$$

donde $\xi \in \mathbb{R}^n$. La transformada de Fourier inversa está definida como

$$\mathcal{F}^{-1}(u)(\xi) = \check{u}(\xi) = (2\pi)^{-(n/2)} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} u(x)dx.$$

Para definir la transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^n)$, se debe tener en cuenta que $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ es un subconjunto denso de $L^2(\mathbb{R})$, y el siguiente resultado:

Teorema 1.1.24 *(Teorema de Plancherel) Si $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces $\mathcal{F}(u), \mathcal{F}^{-1}(u) \in L^2(\mathbb{R}^n)$, y*

$$\|\mathcal{F}(u)\|_{L^2} = \left\|\mathcal{F}^{-1}(u)\right\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}.$$

Referimos al lector a [2] para la demostración de este teorema y los detalles sobre la extensión de la transformada de Fourier al espacio $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Ejemplo 1.1.25 *La transformada de Fourier* $\mathcal{F} : L^2 \to L^2$ *y la transformada inversa de Fourier* $\mathcal{F}^{-1} : L^2 \to L^2$ *son ambas ejemplos de operadores lineales acotados. Además, de acuerdo al teorema anterior, su norma es* $\|\mathcal{F}\| = \|\mathcal{F}^{-1}\| = 1$.

Finalizamos esta sección dando algunas de las propiedades de la transformada de Fourier que serán usadas en este trabajo, las cuales presentamos sin demostración.

Teorema 1.1.26 *Si* $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$*, entonces*

a) $\mathcal{F}(\alpha u + \beta v) = \alpha \mathcal{F}(u) + \beta \mathcal{F}(v), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

b) $u = \mathcal{F}^{-1}\big(\mathcal{F}(u)\big)$

c) $\mathcal{F}(\Delta u) = -|\xi|^2 \hat{u}$

Referimos al lector a [2] para mas detalles.

1.2. El problema abstracto de Cauchy

Sea X un espacio de Banach y A un operador lineal acotado en X. En este caso, es posible definir el concepto de exponencial del operador A mediante la expresión

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}. \tag{1.10}$$

Aquí A^n denota la composición n veces del operador A consigo mismo. Puede verse que esta es una generalización natural de la definición de la función exponencial en $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ o en el espacio de matrices $n \times n$.
Consideremos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = Au(t) \quad (t \geqslant 0) \\ u(0) = x, \end{cases} \tag{1.11}$$

con $u : [0, \infty) \to X$ y $x \in X$. En este caso, tenemos que

$$u(t) = e^{At}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} x$$

es la solución del problema (1.11) para cualquier $x \in X$. En efecto,

$$
\begin{aligned}
\Big\|\frac{e^{A(t+h)}x - e^{At}x}{h} - Ae^{At}x\Big\| &= \Big\|e^{At}\Big(\frac{e^{Ah} - I}{h} - A\Big)x\Big\| \\
&= \Big\|e^{At}\Big(\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(hA)^n}{n!} - I}{h} - A\Big)x\Big\| \\
&= |h|\|A^2 e^{A(t+h)}x\| \to 0, \quad si \quad h \to 0.
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

Además, $u(0) = x$ puesto que $e^0 = I$.

Ahora, se quiere estudiar la existencia y unicidad del problema (1.11), ya en el caso en que el operador A es no es acotado y definido en un subconjunto propio denso en el espacio X. En este caso, observe que la expresión (1.10) que define la exponencial del operador A, no puede ser usada para definir una solución del problema (1.11), pues no es posible realizar la composición A^n, debido a que el operador A está sólo definido en un subconjunto propio del espacio X. Para resolver esta dificultad, se introduce el concepto de semigrupo de operadores acotados.

1.3. Semigrupos uniformemente continuos de operadores lineales acotados

Definición 1.3.1 *Sea X un espacio de Banach. Una familia uniparamétrica $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, de operadores lineales acotados de un espacio de Banach X en el mismo, es un semigrupo en X sí,*

(i) $T(0) = I$, (I es el operador identidad en X).

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ para todo $t, s \geq 0$ (propiedad de semigrupo).

Un semigrupo de operadores lineales acotados, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, es uniformemente continuo si

$$\lim_{t\to 0^+} \| T(t) - I \| = 0. \tag{1.13}$$

Definición 1.3.2 *Definimos el operador A por*

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d^+T(t)x}{dt}\Big|_{t=0} \quad para \quad x \in D(A), \tag{1.14}$$

si el limite existe. Esto nos permite definir el dominio del operador A como

$$D(A) = \{x \in X : \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \quad existe\}. \tag{1.15}$$

A se llama el generador infinitesimal del semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.

Ejemplo 1.3.3 *Veamos que el operador del ejemplo* (1.1.9) *define un semigrupo cuyo generador infinitesimal es el operador derivada. En efecto,*

(i) $(T(0)f)(x) = f(x+0) = f(x) = (If)(x)$, *entonces* $T(0) = I$,

(ii) $(T(s+t)f)(x) = f(x+s+t) = (T(t)f)(x+s) = (T(s)T(t)f)(x)$.

Además, puesto que

$$Af(s) = \lim_{t\to 0^+} \frac{(T(t)f)(s) - f(s)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(t+s) - f(s)}{t} = f'(s),$$

entonces, $D(A) = \{f \in C(\mathbb{R}) : f' \quad existe\}$. *Observe que en este caso el generador infinitesimal A de este semigrupo es no acotado.*

Es claro que si $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo uniformemente continuo de operadores lineales acotados entonces

$$\lim_{s\to t} \| T(s) - T(t) \| = 0. \tag{1.16}$$

Lema 1.3.4 *Sea $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semigrupo uniformemente continuo. Entonces, si $x \in X$,*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x \, ds = T(t)x. \tag{1.17}$$

Demostración. *El resultado se sigue de la continuidad uniforme del semi-*

grupo.

$$\begin{aligned}\Big\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x\ ds - T(t)x\Big\| &= \Big\|\frac{1}{h}\Big(\int_t^{t+h} (T(s)x - T(t)x)\ ds\Big)\Big\| \\ &\leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \|\ T(s)x - T(t)x\ \|\ \ ds \\ &\leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \varepsilon\ ds = \varepsilon.\end{aligned}$$

El siguiente resultado es importante para la demostración de algunos de los resultados a continuación.

Teorema 1.3.5 *Sea X un espacio de Banach. Si $T \in B(X)$ es un operador tal que $\|T\| < 1$ entonces $I - T$ es invertible y el inverso esta dado por*

$$(I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

Demostración. *Dado que X es un espacio de Banach, también lo es $B(X)$ (ver [4], capítulo 4, pags. 104-105). Como $\|T\| < 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n$ converge y por lo tanto, como $\|T^n\| \leq \|T\|^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\|$ también es convergente, . Por lo tanto $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ es convergente, lo cual se debe a un teorema anĺogo al de la convergencia absoluta para series, que es valido también en los espacios de Banach (ver [4], pag. 49). Sea $S = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$ y $S_k = \sum_{n=o}^{k} T^n$. Entonces, la sucesión $\{S_k\}$ converge a S en $B(X)$. Como*

$$\|(I-T)S_k - I\| = \|I - T^{k+1} - I\| = \|-T^{k+1}\| \leq \|T\|^{k+1},$$

y $\|T\| < 1$ se tiene que $\lim_{k\to\infty}(I-T)S_k = I$. Por lo tanto,

$$(I-T)S = (I-T)\lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty}(I-T)S_k = I.$$

Análogamente se deduce que $S(I-T) = I$, luego $I - T$ es invertible y $(I - T)^{-1} = S$.

□

Teorema 1.3.6 *Un operador lineal A es un generador infinitesimal de un semigrupo uniformemente continuo si y sólo si A es un operador lineal acotado.*

Demostración. *Sea A un operador lineal acotado en X y definamos*

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}, \tag{1.18}$$

el lado derecho de (1.18) converge en norma para todo $t \geq 0$ y define, para cada t, un operador lineal acotado $T(t)$. Es claro que $T(0) = I$ y mediante un cálculo directo con la serie de potencia se verifica que $T(t+s) = T(t)T(s)$. Haciendo algunos cálculos simples se estima que

$$\| T(t) - I \| \leq t \| A \| e^{t\|A\|}, \tag{1.19}$$

y

$$\begin{aligned} \Big\| \frac{T(t) - I}{t} - A \Big\| &= \Big\| \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} - I}{t} - A \Big\| \\ &= \|A(T(t) - I)\| \leq t\|A\|^2 e^{t\|A\|} \to 0 \quad si \quad t \to 0, \end{aligned}$$

lo cual implica que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo uniformemente continuo en X y A es el generador infinitesimal.

Sea $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semigrupo uniformemente continuo en X. Fijamos $\rho > 0$ en coeficiente más pequeño tal que $\| I - \rho^{-1} \int_0^\rho T(s)ds \| < 1$. Del teorema (1.3.5) se sigue que $\rho^{-1} \int_0^\rho T(s)ds$ es invertible y por lo tanto también lo es $\int_0^\rho T(s)ds$.

$$\begin{aligned} h^{-1}(T(h) - I) \int_0^\rho T(s)ds &= h^{-1}\Big(\int_0^\rho T(s+h)ds - \int_0^\rho T(s)ds \Big) \\ &= h^{-1}\Big(\int_\rho^{\rho+h} T(s)ds - \int_0^h T(s)ds \Big), \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$h^{-1}(T(h) - I) = \Big(h^{-1} \int_\rho^{\rho+h} T(s)ds - h^{-1} \int_0^h T(s)ds \Big) \Big(\int_0^\rho T(s)ds \Big)^{-1}. \tag{1.20}$$

Luego, si $h \to 0$ *en* (1.20)*, se tiene por el lema* (1.3.4) *que* $h^{-1}(T(h) - I)$ *converge al operador* $(T(\rho) - I)\big(\int_0^\rho T(s)ds\big)^{-1}$ *el cual es acotado puesto que*

$$\begin{aligned} \| \left(\rho^{-1}\int_0^\rho T(s)ds\right)^{-1} \| &= \| \sum_{n=0}^{\infty}\left(I - \rho^{-1}\int_0^\rho T(s)ds\right)^n \| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \| I - \rho^{-1}\int_0^\rho T(s)ds \|^n, \end{aligned}$$

donde $\| I - \rho^{-1}\int_0^\rho T(s)ds \| < 1$*. Esto implica que* $\| \left(\rho^{-1}\int_0^\rho T(s)ds\right)^{-1} \| < \infty$*. Así,* $\left(\int_0^\rho T(s)ds\right)^{-1}$ *es un operador acotado.*

□

Por unicidad del limite en la definición (1.3.2), el semigrupo $T(t)$ tiene un único generador infinitesimal. Además, si $T(t)$ es uniformemente continuo este generador es un operador lineal acotado, de acuerdo al teorema anterior. Por otra parte, todo operador lineal acotado A es el generador infinitesimal de un semigrupo uniformemente continuo $T(t)$ y además este semigrupo es único, como veremos en el siguiente teorema.

Teorema 1.3.7 *Sean* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *y* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *semigrupos uniformemente continuos. Si*

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{T(t)-I}{t} = A = \lim_{t\to 0^+}\frac{S(t)-I}{t}, \tag{1.21}$$

entonces $T(t) = S(t)$ *para* $t \geq 0$*.*

Demostración. *Se demostrara que dado* $t' > 0$*,* $T(t) = S(t)$ *para todo* $0 \leq t \leq t'$*. Sea* $t' > 0$ *fijo, dado que* $t \to \| T(t) \|$ *y* $t \to \| S(t) \|$ *son aplicaciones continuas, existen constantes* C_1 *y* C_2 *positivas tal que* $\|T(t)\| \leq C_1$ *y* $\|S(t)\| \leq C_2$ *para* $0 \leq t \leq t'$*. Dado* $\varepsilon > 0$*, se deduce de* (1.21) *que existe un* $\delta > 0$ *tal que*

$$h^{-1} \| T(h) - S(h) \| \leq \varepsilon/t'C_1C_2 \quad para \quad 0 \leq h \leq \delta. \tag{1.22}$$

Sea $0 \leq t \leq t'$ *y consideremos* $n \geq 1$ *tal que* $t/n < \delta$*. Por la propiedad de* *semigrupo y* (1.22) *se sigue que*

$$\begin{aligned}\| T(t) - S(t) \| &= \| T\Big(n\frac{t}{n}\Big) - S\Big(n\frac{t}{n}\Big) \| \\ &\leq \sum_{k=}^{n-1} \| T\Big((n-k)\frac{t}{n}\Big)S\Big(\frac{kt}{n}\Big) - T\Big((n-k-1)\frac{t}{n}\Big)S\Big(\frac{(k+1)t}{n}\Big) \| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \| T\Big((n-k-1)\frac{t}{n}\Big) \|\| T\Big(\frac{t}{n}\Big) - S\Big(\frac{t}{n}\Big) \|\| S\Big(\frac{kt}{n}\Big) \| \\ &\leq C_1 n \frac{\varepsilon}{t' C_1 C_2} \frac{t}{n} C_2 \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Dado que $\varepsilon > 0$ *es arbitrario, entonces* $T(t) = S(t)$ *para* $0 \leq t \leq t'$.

$\square$

Corolario 1.3.8 *Sea* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *un semigrupo uniformemente continuo. Entonces*

a) Existe una constante $w \geq 0$ *tal que* $\| T(t) \| \leq e^{wt}$.

b) Existe un único operador lineal acotado A *tal que* $T(t) = e^{At}$.

c) El operador A *en (b) es el generador infinitesimal de* $T(t)$.

d) $t \to T(t)$ *es diferenciable y*

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A. \tag{1.23}$$

Demostración. *Todas las afirmaciones del corolario* (1.3.8) *se siguen inmediatamente de (b). Para la prueba de (b) note que el generador de* $T(t)$ *es un operador lineal acotado* A. A *es también el generador de* e^{tA} *definido en* (1.18), *y por lo tanto, por el teorema* (1.3.7), $T(t) = e^{tA}$.

$\square$

1.4. Semigrupos fuertemente continuos de operadores lineales acotados

En esta sección supondremos que X es un espacio de Banach.

Definición 1.4.1 *Un semigrupo* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *en* X*, se dice que es fuertemente continuo si*

$$\lim_{t\to 0^+} T(t)x = x \quad para \quad todo \quad x \in X. \tag{1.24}$$

A este semigrupo lo llamamos un semigrupo de clase C_0 o simplemente C_0-*semigrupo.*

Ejemplo 1.4.2 *Veamos que el operador definido en el ejemplo* (1.1.9) *es un* C_0*-semigrupo. En el ejemplo* (1.3.3) *se mostró que el operador define un semigrupo. Ahora, por la continuidad uniforme de* f *se tiene que*

$$\|T(t)f - f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x+t) - f(x)| \to 0, \quad si \quad t \to 0^+.$$

Por lo tanto, (1.6) es un C_0-semigrupo.

Ejemplo 1.4.3 *Ilustraremos el concepto de semigrupo, a partir del problema de valor inicial asociado a la ecuación del calor.*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = f, & \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \tag{1.25}$$

Aplicando transformada de Fourier tenemos que $\hat{u}_t = -|\xi|^2 \hat{u}$*, por lo tanto,* $\widehat{u(\xi,t)} = e^{-t|\xi|^2}\hat{f}$*. Así, la solución del problema se puede escribir en la forma*

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\xi|^2}\hat{f})(x). \tag{1.26}$$

Para cada $t \geq 0$*, el operador* $T(t) : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$*, definido como*

$$T(t)f = \mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\xi|^2}\hat{f}). \tag{1.27}$$

Observe que la solución u *del problema* (1.25) *puede escribirse también como*

$$u(x,t) = T(t)f(x).$$

Tenemos que $T(t)$, $t \geq 0$ es un C_0-semigrupo de operadores lineales acotados. En efecto, por la linealidad de la transformada de Fourier y la transformada de Fourier inversa se tiene que

$$T(t)(f+h) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\xi|^2}\widehat{f+h}) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\xi|^2}\hat{f}) + \mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\xi|^2}\hat{h}) = T(t)f + T(t)h$$

$$T(t)(\alpha f) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\xi|^2}\widehat{\alpha f}) = \alpha\mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\xi|^2}\hat{f}) = \alpha T(t)(f),$$

para cualquier $f, g \in L^2$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, con $\mathbb{K}$ el campo escalar. Por lo tanto, $T(t)$ es lineal para cada $t \geq 0$.

Ahora, tenemos que

(i) $T(0)f = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = f$, así $T(0) = I$.

(ii) Para $s, t \geq 0$

$$\begin{aligned} T(t+s) &= \mathcal{F}^{-1}(e^{-(t+s)|\xi|^2}) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\xi|^2}e^{-s|\xi|^2}) \\ &= \mathcal{F}^{-1}\Big(e^{-t|\xi|^2}\mathcal{F}\big(\mathcal{F}^{-1}(e^{-s|\xi|^2})\big)\Big) = T(t)T(s)f. \end{aligned}$$

Empleando el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, se obtiene que

$$\begin{aligned} \|T(t)f - f\| &= \|\mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\xi|^2}\hat{f}) - f\| \\ &= \|\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\xi|^2}\hat{f}) - f)\| = \|e^{-t|\xi|^2}\hat{f} - \hat{f}\| \to 0, \ \text{si } t \to 0^+. \end{aligned}$$

para toda $f \in L^2$. Así, $T(t)$ es un C_0-semigrupo.

Veamos que el generador infinitesimal A del semigrupo (1.27) es el operador de Laplace Δ. Entonces,

$$\begin{aligned} \Big\|\frac{T(t)f - f}{t} - \Delta f\Big\| &= \Big\|\frac{\mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\xi|^2}\hat{f}) - f}{t} - \Delta f\Big\| \\ &= \Big\|\mathcal{F}\Big(\frac{\mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\xi|^2}\hat{f}) - f}{t} - \Delta f\Big)\Big\| \\ &= \Big\|\frac{e^{-t|\xi|^2}\hat{f} - \hat{f}}{t} - \widehat{\Delta f}\Big\| \\ &= \Big\|\Big(\frac{e^{-t|\xi|^2} - 1}{t}\Big)\hat{f} - \widehat{\Delta f}\Big\|. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Tomando límite cuando $t \to 0^+$, aplicando el teorema de L'Hospital, y el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, se tiene que

$$\lim_{t \to 0^+} \left\| \frac{T(t)f - f}{t} - \Delta f \right\| = 0.$$

Por lo tanto, $Af = \Delta f$.

Ejemplo 1.4.4 *Consideremos ahora el problema de valor inicial de la ecuación de transporte dado por.*

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0, & \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = f, & \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{cases} \tag{1.29}$$

con c constante. Aplicando transformada de Fourier se tiene $\hat{u}_t = -ic\xi\hat{u}$, *por lo tanto, la solución del problema se puede escribir en la forma*

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-ict\xi}\hat{f})(x). \tag{1.30}$$

Para cada $t \geq 0$, *el operador* $T(t) : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, *definido como*

$$T(t)f = \mathcal{F}^{-1}(e^{-ict\xi}\hat{f}), \tag{1.31}$$

es un C_0*-semigrupo de operadores lineales acotados. La prueba de esto es análoga a la del ejemplo anterior.*

Teorema 1.4.5 *Sea* $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ *un* C_0*-semigrupo. Existe una constante* $w \geq 0$ *y* $M \geq 1$ *tal que*

$$\| T(t) \| \leq Me^{wt} \;\; para \;\; 0 \leq t \leq \infty. \tag{1.32}$$

Demostración. *Primero demostraremos que existe un* $\eta > 0$ *tal que* $\| T(t) \|$ *es acotado para* $0 \leq t \leq \eta$. *Si esto es falso, entonces existe una sucesión* $\{t_n\}$ *que satisface* $t_n \geq 0$, $\lim_{t\to\infty} t_n = 0$ *y* $\| T(t_n) \| \geq n$. *Por el principio de acotación uniforme se sigue que para todo* $x \in X$, $\| T(t_n)x \|$ *es no acotado, lo cuan contradice* (1.24). *Este principio nos dice que la acotación puntual de una familia de aplicaciones lineales y continuas entre espacios normados es equivalente a su acotación uniforme, es decir, a su acotacin con la norma del espacio (ver [5], capítulo 2, pag. 24) . Por lo tanto* $\| T(t) \| \leq M$ *para* $0 \leq t \leq \eta$. *Dado que* $\| T(0) \| = 1$, $M \geq 1$. *Sea* $w = \eta^{-1} log(M) \geq 0$. *Ahora si*

$t > \eta$ entonces para $t \geq 0$ tenemos que $t = n\eta + \delta$ donde $0 \leq \delta \leq \eta$ y por lo tanto empleando la propiedad de semigrupo se tiene que

$$\| T(t) \| = \| T(\delta)T(\eta)^n \| \leq M^{n+1} \leq MM^{t/\eta} = Me^{wt}.$$

□

Corolario 1.4.6 *Si $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es un C_0-semigrupo entonces para todo $x \in X$, $t \to T(t)x$ es una función continua de $\mathbb{R}_0^+$ en X.*

Demostración. *Sea $t, h \geq 0$, la continuidad de $t \to T(t)x$ se sigue de*

$$\| T(t+h)x - T(t)x \| \leq \| T(t) \| \| T(h)x - x \| \leq Me^{wt} \| T(h)x - x \|,$$

y para $t \geq h \geq 0$,

$$\begin{aligned} \| T(t-h)x - T(t)x \| &= \| T(t-h)x - T(t-h+h)x \| \\ &\leq \| T(t-h) \| \| x - T(h)x \| = Me^{wt} \| x - T(h)x \|, \end{aligned}$$

y de la continuidad fuerte del semigrupo.

□

Teorema 1.4.7 *Sea $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semigrupo con generador infinitesimal A. Entonces*

a) Si $x \in X$, $\int_0^t T(s)x\ ds \in D(A)$ y

$$A\Big(\int_0^t T(s)x\ ds\Big) = T(t)x - x. \tag{1.33}$$

b) Si $x \in D(A)$, $T(t)x \in D(A)$ y

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax. \tag{1.34}$$

c) Si $x \in D(A)$,

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(r)Ax\ dr = \int_s^t AT(r)x\ dr. \tag{1.35}$$

Demostración. *Para la prueba de (a) sea $x \in X$ y $h > 0$. Entonces,*

$$\begin{aligned}\frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(s)x\ ds &= \frac{1}{h}\int_0^t (T(s+h)x - T(s)x)\ ds\\ &= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x\ ds - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)x\ ds,\end{aligned}$$

y si $h \to 0$ el lado derecho de la igualdad anterior tiende a $T(t)x - x$. Para probar (b) sea $x \in D(A)$ y $h > 0$. Entonces

$$\frac{T(h)-I}{h}T(t)x = T(t)\Big(\frac{T(h)-I}{h}\Big)x \to T(t)Ax \quad si \quad h \to 0. \tag{1.36}$$

Entonces, $T(t)x \in D(A)$ y $AT(t)x = T(t)Ax$, por lo tanto (1.36) implica que

$$\frac{d^+}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax,$$

es decir, la derivada de por la derecha de $T(t)x$ es $T(t)Ax$. Para completar la demostración de (1.34) tenemos que mostrar qué para $t > 0$, la derivada izquierda de $T(t)x$ existe y es igual a $T(t)Ax$. Esto se deduce de,

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\Big[\frac{T(t)x - T(t-h)}{h} - T(t)Ax\Big]\\ &\quad = \lim_{h\to 0} T(t-h)\Big[\frac{T(h)x - x}{h} - Ax\Big] + \lim_{h\to 0}(T(t-h)Ax - T(t)Ax),\end{aligned}$$

y el hecho de que ambos términos del lado derecho tienden a cero, dado que $x \in D(A)$ y $\| T(t-h) \|$ es acotado en $0 \le h \le t$ y también por la continuidad fuerte de $T(t)$. Con esto se concluye la prueba de (b). La demostración de (c) se sigue mediante la integración en (1.34) de s a t.

□

Definición 1.4.8 *Sea X un espacio de Banach. Un operador lineal $A : D(A) \subset X \to X$, es cerrado si para cada sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $D(A)$ que converge a $x \in X$ tal que $Ax_n \to y$ cuando $n \to \infty$, se tiene que $x \in D(A)$ y $Ax = y$.*

Corolario 1.4.9 *Si A es un generador infinitesimal de un C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ entonces $D(A)$, el dominio de A, es denso en X y A es un operador lineal cerrado.*

Demostración. *Para todo $x \in X$ consideremos $x_t = 1/t \int_0^t T(s)x\ ds$. Por la parte (a) del teorema* (1.4.7)*, $x_t \in D(A)$ para todo $t > 0$ y por el lema* (1.3.4)*, $x_t \to x$ cuando $t \to 0$. Por lo tanto $\overline{D(A)}$, la clausura de $D(A)$, es igual a X. La linealidad de A es evidente por ser el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo. Para probar que A es cerrado sea $x_n \in D(A)$, $x_n \to x$ y $Ax_n \to y$ cuando $n \to \infty$. Por la parte (c) del teorema* (1.4.7) *tenemos*

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n\ ds. \tag{1.37}$$

El integrando del lado derecho de (1.37) *converge a $T(s)y$ uniformemente en intervalos acotados. Consecuentemente cuando $n \to \infty$ en* (1.37) *se tiene que*

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y\ ds. \tag{1.38}$$

Dividiendo (1.38) *por $t > 0$, tomando $t \to 0$ y usando el lema* (1.3.4) *se tiene que $x \in D(A)$ y $Ax = y$.*

$\square$

Teorema 1.4.10 *Sean $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ y $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ C_0-semigrupos con generadores infinitesimales A y B respectivamente. Si $A = B$ entonces $T(t) = S(t)$ para $t \geq 0$.*

Demostración. *Sea $x \in D(A) = D(B)$. Por la parte (b) del teorema* (1.4.7) *se sigue que la función $s \to T(t-s)S(s)x$ es diferenciable y que*

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}T(t-s)S(s)x &= -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)BS(s)x \\ &= -T(t-s)AS(s)x + T(t-s)BS(s)x = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto $s \to T(t-s)S(s)x$ es constante y en particular los valores de $s = 0$ y $s = t$ son los mismos, es decir, $T(t)x = S(t)x$. Esto se tiene para todo $x \in D(A)$ y por el corolario (1.4.9)*, $D(A)$ es denso en X. Por lo tanto $T(t)x = S(t)x$ para todo $x \in X$.*

$\square$

Corolario 1.4.11 *Si A es el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ en un espacio de Banach X, entonces el problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = Au(t) \quad (t \geqslant 0) \\ u(0) = x, \end{cases} \tag{1.39}$$

tiene una única solución $u : [0, \infty) \to X$ y $x \in D(A)$, con

$$u(t) = T(t)x.$$

Demostración. *Este resultado se tiene de manera inmediata de los teoremas* (1.4.7) *y* (1.4.10).

1.5. Teorema de Hille-Yosida

Sea $T(t)$ un C_0-*semigrupo*. Por el teorema (1.4.5) se sigue que existe una constante $w \geq 0$ y $M \geq 1$ tal que $\| T(t) \| \leq Me^{wt}$ para $t \geq 0$. Si $w = 0$ decimos que $T(t)$ es $uniformemente$ *acotado* y además si $M = 1$ decimos que este es un C_0-*semigrupo de contracción*. Esta sección está dedicada a la caracterización del generador infinitesimal de los C_0-semigrupos de contracción, es decir, se quieren estudiar condiciones en el comportamiento del resolvente de un operador A, que son necesarias y suficientes para que A sea el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo de contracción.

Ejemplo 1.5.1 *Teniendo en cuenta lo mostrado el ejemplo* (1.4.2)*, observe que el operador definido en el ejemplo* (1.1.9) *es un C_0-semigrupo de contracción, puesto que su norma es $\|T(t)\| = 1$.*

Recordemos que si A es un operador lineal en X, no necesariamente acotado, el *conjunto resolvente* $\rho(A)$ de A es el conjunto de todos los números complejos λ para los cuales el operador $\lambda I - A$ es invertible en X, es decir, $(\lambda I - A)^{-1}$ es un operador lineal acotado en X. La familia $R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$ de operadores lineales, es llamada el *resolvente* de A.

Teorema 1.5.2 *(Hille-Yosida). Un operador lineal A es un generador infinitesimal de un C_0-semigrupo de contracción $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ si y sólo si*

(i) A es cerrado y $\overline{D(A)} = X$.

(ii) El conjunto resolvente $\rho(A)$ contiene a $\mathbb{R}^+$ y para todo $\lambda > 0$

$$\| R(\lambda : A) \| \leq \frac{1}{\lambda}. \tag{1.40}$$

Demostración. *Supongamos que A es el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo de contracción. Entonces, por el corolario (1.4.9), este es cerrado y $\overline{D(A)} = X$. Para $\lambda > 0$ y $x \in X$ sea*

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\ dt, \tag{1.41}$$

dado que $t \to T(t)x$ es continua y uniformemente acotada, la integral esta bien definida, por lo tanto $R(\lambda)$ define un operador lineal acotado que satisface

$$\| R(\lambda)x \| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \| T(t)x \| \ dt \leq \frac{1}{\lambda} \| x \| . \tag{1.42}$$

Además, para $h > 0$

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - I}{h} R(\lambda)x &= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}(T(t+h)x - T(t)x)\ dt \\ &= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\ dt - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda t}T(t)x\ dt. \end{aligned} \tag{1.43}$$

Si $h \to 0$, la parte derecha de (1.43) converge a $\lambda R(\lambda)x - x$. Esto implica que para todo $x \in X$ y $\lambda > 0$, $R(\lambda)x \in D(A)$ y $AR(\lambda) = \lambda R(\lambda) - I$, o

$$(\lambda I - A)R(\lambda) = I. \tag{1.44}$$

Ahora para todo $x \in D(A)$ se tiene que

$$\begin{aligned} R(\lambda)Ax = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)Ax\ dt &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}AT(t)x\ dt \\ &= A\Big(\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\ dt\Big) = AR(\lambda)x. \end{aligned} \tag{1.45}$$

En (1.45) se usó el ítem (b) del teorema (1.4.7) y la cerradura de A. Por (1.44) y (1.45) se sigue que

$$R(\lambda)(\lambda I - A)x = x \text{ para todo } x \in D(A), \tag{1.46}$$

por lo tanto $R(\lambda)$ es el inverso de $\lambda I - A$ y existe para todo $\lambda > 0$, además satisface el estimativo (1.40)*. Por lo tanto las condiciones (i) y (ii) son necesarias.*

□

Para demostrar que las condiciones (i) y (ii) son suficientes para que A sea un generador infinitesimal de un C_0-semigrupo de contracción, necesitamos los siguientes lemas.

Lema 1.5.3 *Sea A satisfaciendo las condiciones (i) y (ii) del teorema* (1.5.2) *y sea $R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}$. Entonces*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda : A)x = x \quad para \ x \in X. \tag{1.47}$$

Demostración. *Supongamos que $x \in D(A)$. Entonces*

$$\begin{aligned}\| \lambda R(\lambda : A)x - x \| &= \| AR(\lambda : A)x \| \\ &= \| R(\lambda : A)Ax \| \leq \frac{1}{\lambda} \| Ax \| \to 0 \ cuando \ \lambda \to \infty.\end{aligned}$$

Dado que $D(A)$ es denso en X y $\| \lambda R(\lambda : A) \| \leq 1$ se concluye que

$$\lambda R(\lambda : A)x \to x \ si \ \lambda \to \infty,$$

para todo $x \in X$.

□

Ahora definimos para todo $\lambda \geq 0$, la *aproximación de Yosida* de A por

$$A_\lambda = \lambda AR(\lambda : A) = \lambda^2 R(\lambda : A) - \lambda I. \tag{1.48}$$

A_λ es una aproximación de A en el siguiente sentido:

Lema 1.5.4 *Sea A satisfaciendo las condiciones (i) y (ii) del teorema de Hille-Yosida*(1.5.2)*. Si A_λ es la aproximación de Yosida de A, entonces*

$$\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda x = Ax \quad para \ x \in D(A). \tag{1.49}$$

Demostración. *Sea $x \in D(A)$, por el lema* (1.5.3) *y la definición de A_λ se sigue inmediatamente que*

$$\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda x = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda : A)Ax = Ax.$$

$\square$

Lema 1.5.5 *Sea A satisfaciendo las condiciones (i) y (ii) del teorema de Hille-Yosida*(1.5.2)*. Si A_λ es la aproximación de Yosida de A, entonces A_λ es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracción uniformemente continuo $\{e^{tA_\lambda}\}_{t\geq 0}$. Además para todo $x \in X$, $\lambda, \mu > 0$ se tiene que*

$$\| e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x \| \leq t \| A_\lambda x - A_\mu x \| . \tag{1.50}$$

Demostración. *Por* (1.48) *es claro que A_λ es un operador lineal acotado y por lo tanto es el generador infinitesimal de un semigrupo uniformemente continuo e^{tA_λ} de operadores lineales acotados. Además,*

$$\| e^{tA_\lambda} \| = e^{-t\lambda} \| e^{t\lambda^2 R(\lambda:A)} \| \leq e^{-t\lambda} e^{t\lambda^2 \|R(\lambda:A)\|} \leq 1, \tag{1.51}$$

y así e^{tA_λ} es un semigrupo de contracción. Por como están definidos e^{tA_λ}, e^{tA_μ}, A_λ y A_μ conmutan entre si, en consecuencia

$$\begin{aligned}\| e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x \| &= \| \int_0^1 \frac{d}{ds}(e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}x)\ ds \| \\ &\leq \int_0^1 t \| e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}(A_\lambda x - A_\mu x) \| \ \ ds \leq t \| A_\lambda x - A_\mu x \| .\end{aligned}$$

Ahora, con ayuda de los lemas probados anteriormente, se demostrara que (i) y (ii) son condiciones suficientes.

Demostración. *Sea $x \in D(A)$, entonces*

$$\| e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x \| \leq t \| A_\lambda x - A_\mu x \| \leq t \| A_\lambda x - Ax \| + t \| Ax - A_\mu x \| . \tag{1.52}$$

por (1.52) *y el lema* (1.5.4) *se sigue que para $x \in D(A)$, $e^{tA_\lambda}x$ converge cuando $\lambda \to \infty$ y esta convergencia es uniforme en intervalos acotados. Dado que $D(A)$ es denso en X y $\| e^{tA_\lambda} \| \leq 1$, se tiene que $(e^{tA_\lambda}x)_{\lambda\geq 0}$ es convergente para todo $x \in X$, y el límite es uniforme sobre intervalos acotados para t. Para cada $x \in X$, definamos*

$$T(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x. \tag{1.53}$$

De (1.53) *se deduce fácilmente que el límite* $T(t)$ *satisface la propiedad de semigrupo, también que* $T(0) = I$ *y* $\| T(t) \| \leq 1$. *Así mismo* $t \to T(t)x$ *es una función continua pata todo* $t \geq 0$ *por ser el límite uniforme de la función continua* $t \to e^{tA_\lambda}$. *Por lo tanto* $T(t)$ *es un* C_0*-semigrupo de contracción en* X. *Para concluir la demostración se debe mostrar que* A *es el generador infinitesimal de* $T(t)$. *Sea* $x \in D(A)$, *usando* (1.53) *y el teorema* (1.4.7) *se tiene que*

$$T(t)x - x = \lim_{\lambda\to\infty}(e^{tA_\lambda}x - x) = \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^t e^{sA_\lambda}A_\lambda x\ ds = \int_0^t T(s)Ax\ ds. \quad (1.54)$$

La última igualdad se sigue por la convergencia uniforme de $e^{tA_\lambda}A_\lambda x$ *a* $T(t)Ax$ *en intervalos acotados. Sea* B *el generador infinitesimal de* $T(t)$ *y sea* $x \in D(A)$. *Dividiendo* (1.54) *por* $t > 0$ *y tomando* $t \to 0$ *se tiene que* $x \in D(B)$ *y que* $Bx = Ax$. *Por lo tanto* $B \supseteq A$. *Dado que* B *es el generador infinitesimal de* $T(t)$, *se deduce de las condiciones necesarias del teorema de Hille-Yosida que* $1 \in \rho(B)$. *Dado que* $B \supseteq A$, $(I - B)D(A) = (I - A)D(A) = X$ *lo cual implica que* $D(B) = (I - B)^{-1}X = D(A)$ *y por lo tanto* $A = B$.

$\square$

De la prueba del teorema de Hille-Yosida se siguen algunas consecuencias inmediatas que se mostraran a continuación.

Corolario 1.5.6 *Sea* A *el generador infinitesimal de un* C_0*-semigrupo de contracción* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. *Si* A_λ *es la aproximción de Yosida de* A, *entonces*

$$T(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x \quad \text{para } x \in X. \quad (1.55)$$

Demostración. *Por la demostración del teorema de* $Hille\text{-}Yosida$ *se deduce que la parte derecha de* (1.55) *define un* C_0*-semigrupo de contracción, llamemoslo* $S(t)$, *cuyo generador infinitesimal es* A. *Por el teorema* (1.4.10) *se deduce que* $T(t) = S(t)$.

$\square$

Corolario 1.5.7 *Sea* A *el generador infinitesimal de un* C_0*-semigrupo de contracción* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. *El resolvente de* A *contiene el semiplano abierto derecho, es decir,* $\rho(A) \supseteq \{\lambda : Re\lambda > 0\}$ *y para tal* λ

$$\| R(\lambda : A) \| \leq \frac{1}{Re\lambda}. \quad (1.56)$$

Demostración. *El operador* $R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\ ds$ *está bien definido para* $Re\lambda > 0$. *En la demostración de la parte necesaria del teorema de Hille-Yosida fue demostrado que* $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ *y por lo tanto* $\rho(A) \supseteq \{\lambda : Re\lambda > 0\}$. *El estimativo* (1.56) *para* $R(\lambda)$ *se tiene de manera inmediata empleando la misma idea que en* (1.42).

$\square$

Sea $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-*semigrupo* tal que $\| T(t) \|\leq e^{wt}$, para algún $w > 0$. Considere $S(t) = e^{-wt}T(t)$. Es claro que $S(t)$ es un C_0-semigrupo de contracción. Si A es el generador infinitesimal de $T(t)$ entonces $A - wI$ es el generador infinitesimal de $S(t)$. De otro lado si A es el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo de contracción $S(t)$, entonces $A + wI$ es el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo $T(t)$ que satisface $\| T(t) \|\leq e^{wt}$, estas afirmaciones se verifican fácilmente de la definición (1.3.1). En efecto, $T(t) = e^{wt}S(t)$. Esta observación nos conduce a la caracterización de un C_0-semigrupo que satisface $\| T(t) \|\leq e^{wt}$, que conduce a una generalización del teorema Hille-Yosida en el siguiente corolario.

Corolario 1.5.8 *Un operador lineal* A *es un generador infinitesimal de un* C_0*-semigrupo que satisface* $\| T(t) \|\leq e^{wt}$, $t \geq 0$, *para algún* $w \geq 0$ *si y sólo si*

(i) A *es cerrado y* $\overline{D(A)} = X$.

(ii) El conjunto resolvente $\rho(A)$ *de* A *contiene el rayo* $\{\lambda : Im\lambda = 0, \lambda > w\}$ *y para tal* λ

$$\| R(\lambda : A) \|\leq \frac{1}{\lambda - w}. \tag{1.57}$$

1.6. Teorema de Lumer-Phillips

En la sección anterior se mostró la caracterización de Hille-Yosida del generador de un C_0-semigrupo de contracción. En esta sección se mostrara una caractrización diferente de tales generadores. Para probar este resultado se necesitan algunas nociones preliminares.

Definición 1.6.1 *Sea* X *un espacio normado sobre un campo escalar* $\mathbb{K}$. *El espacio* $B(X, \mathbb{K})$, *de las funciones lineales continuas de* X *en* $\mathbb{K}$, *es llamado el espacio dual de* X *y se denota por* X^*.

Sea X un espacio de Banach y X^* su espacio dual. Se denota el valor de $x^* \in X^*$ en $x \in X$ por $\langle x^*, x\rangle$ o $\langle x, x^*\rangle$. Para todo $x \in X$ se define el conjunto dualidad por $F(x) \subseteq X^*$ por

$$F(x) = \{x^* : x^* \in X^* \ y \ \langle x, x^*\rangle = \| x \|^2 = \| x^* \|^2\}. \tag{1.58}$$

$F(x) \neq \emptyset$, pues como una consecuencia del teorema de Hahn-Banach se tiene que para todo $x \in X$ existe $f \in X^*$ tal que $\langle x, f\rangle = \| x \|$ y $\| f \|_* = 1$ (ver [5], capítulo 2, pag. 17). Luego $x^* = \| x \| \cdot f$ satisface $\langle x, x^*\rangle = \| x \| \langle x, f\rangle = \| x \|^2$ y $\| x \| = \| x^* \|_*$ y por lo tanto $x^* \in F(x)$.

Definición 1.6.2 *Un operador lineal A es disipativo si para todo $x \in D(A)$ existe un $x^* \in F(x)$ tal que $Re\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$.*

Ejemplo 1.6.3 *Para un ejemplo simple en dimensión finita, consideremos el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ con su producto interno usual. Sea A el operador lineal tal que $A\vec{x} = -\vec{x}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Entonces,*

$$(Ax, x) = Ax \cdot x = (-x) \cdot x = -\|x\|^2 \leq 0,$$

es decir, A es disipativo.

Una caracterización muy útil de los operadores disipativos es la siguiente.

Teorema 1.6.4 *Un operador lineal A es disipativo si y sólo si*

$$\| (\lambda I - A)x \| \geq \lambda \| x \| \quad \textit{para todo } x \in D(A) \ y \ \lambda > 0. \tag{1.59}$$

Demostración. *Sea A un operador disipativo, $\lambda > 0$ y $x \in D(A)$. Si $x = 0$, la desigualdad se tiene de manera inmediata. Considerando $x \neq 0$, $x^* \in F(x)$ y $Re\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$, entonces*

$$\| (\lambda I - A)x \| \| x \| \geq |\langle \lambda x - Ax, x^*\rangle| \geq Re\langle \lambda x - Ax, x^*\rangle \geq \lambda \| x \|^2,$$

de donde se obtiene (1.59). Ahora sea $x \in D(A)$ y $\lambda \| x \| \leq \| (\lambda I - A)x \|$ para todo $\lambda > 0$. Sean $y_n^* \in F(nx - Ax)$ y $z_n^* = y_n^* / \| y_n^* \|$ entonces $\| z_n^* \| = 1$ y

$$\begin{aligned} \lambda \| x \| \leq \| (nx - Ax) \| &= \langle nx - Ax, z_n^*\rangle \\ &= \lambda Re\langle x, z_n^*\rangle - Re\langle Ax, z_n^*\rangle \leq \lambda \| x \| - Re\langle Ax, z_n^*\rangle, \end{aligned}$$

para todo $\lambda > 0$. Por lo tanto

$$Re\langle Ax, z_n^*\rangle \leq 0 \quad y \quad Re\langle x, z_n^*\rangle \geq\| x \| - \frac{1}{\lambda} \| Ax \| . \tag{1.60}$$

La sucesión $\{z_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ *está contenida en la bola unitaria de* X^**, la cual es compacta para la topología débil-*(débil-estrella). Luego, tiene un punto de acumulación que se denotara* $z^* \in X^*$*. Al pasar al límite,* (1.60) *se convierten en* $Re\langle Ax, z^*\rangle \leq 0$ *y* $Re\langle x, z^*\rangle \geq\| x \|$*. Pero* $Re\langle x, z^*\rangle \leq\| x \|$*. Luego,* $\langle x, z^*\rangle =\| x \|$ *y* $\| z^* \|_* = 1$*. Si* $x^* =\| x \| z^*$*, entonces se tiene que* $\langle x, z^*\rangle =\| x \|^2 =\| x^* \|^2$*. Por lo tanto* $x^* \in F(x)$ *y* $Re\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$*, para todo* $x \in D(A)$*. De donde se concluye que* A *es un operador disipativo.*

□

Teorema 1.6.5 *(Lumer-Phillips). Sea* A *un operador lineal con dominio denso* $D(A)$ *en* X*.*

(a) Si A *es disipativo y existe un* $\lambda_0 > 0$ *tal que la imagen* $Im(\lambda_0 I - A)$*, de* $\lambda_0 I - A$ *es* X*, entonces* A *es un generador infinitesimal de un* C_0*-semigrupo de contracción en* X*.*

(b) Si A *es el generador infinitesimal de un* C_0*-semigrupo de contracción en* X *entonces* $Im(\lambda I - A) = X$ *para todo* $\lambda > 0$ *y* A *es disipativo. Por otra parte, para todo* $x \in D(A)$ *y todo* $x^* \in F(x)$*,* $Re\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$*.*

Demostración. *Sea* $\lambda > 0$*, dado que* A *es disipativo por el teorema* (1.6.4) *se tiene que*

$$\| (\lambda I - A)x \|\geq \lambda \| x \| \quad \textit{para todo } x \in D(A) \textit{ y } \lambda > 0. \tag{1.61}$$

Dado que $Im(\lambda_0 I - A) = X$*, se sigue de* (1.61) *que el operador* $(\lambda_0 I - A)$ *es invertible y que* $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ *es un operador lineal acotado y por lo tanto cerrado. Pero entonces* $\lambda_0 I - A$ *es cerrado, y así* A *también es cerrado. Si* $Im(\lambda I - A) = X$ *para todo* $\lambda > 0$ *entonces* $\rho(A) \supseteq (0, \infty)$ *y por* (1.61) $\| R(\lambda : A) \|\leq \lambda^{-1}$*. Por el teorema de Hille-Yosida se sigue que* A *es el generador infinitesimal de un* C_0*-semigrupo de contracción en* X*.*

Para completar la demostración de (a), queda por mostrar que $Im(\lambda I - A) = X$ *para todo* $\lambda > 0$*. Consideremos el conjunto*

$$\mathcal{C} = \{\lambda > 0 : Im(\lambda I - A) = X\}.$$

$\mathcal{C} \neq \emptyset$ pues $\lambda_0 \in \mathcal{C}$. Sea $\lambda \in \mathcal{C}$, como $Im(\lambda I - A) = X$ y $\| (\lambda I - A)x \| \geq \lambda \| x \|$, para todo $x \in D(A)$, se tiene que $\lambda \in \rho(A)$, el cual es abierto. Por lo tanto existe $\delta > 0$ tal que $(\lambda - \delta, \lambda + \delta) \subseteq \rho(A)$. Ahora si $\tilde{\lambda} \in (\lambda - \delta, \lambda + \delta) \subseteq \rho(A)$, el operador $\tilde{\lambda} I - A$ es invertible y como consecuencia la ecuación $(\tilde{\lambda} I - A)x = y$ siempre tiene solución para cada $y \in X$, es decir $Im(\tilde{\lambda} I - A) = X$. Por lo tanto $\tilde{\lambda} \in \mathcal{C}$, lo cual implica que $(\lambda - \delta, \lambda + \delta) \subseteq \mathcal{C}$, y así $\mathcal{C}$ es abierto en $(0, \infty)$. Ahora consideremos una sucesión $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$ tal que $\lambda_n \to \lambda > 0$. Para cada $y \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in D(A)$ tal que $\lambda_n x_n - A x_n = y$. Por lo tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\| x_n \| \leq \frac{1}{\lambda_n} \| \lambda_n x_n - A x_n \| = \frac{\| y \|}{\lambda_n} \leq C,$$

para algún $C > 0$. Además,

$$\begin{aligned}
\lambda_m \| x_n - x_m \| &\leq \| \lambda_m (x_n - x_m) - A(x_n - x_m) \| \\
&= \| -(\lambda_m x_m - A x_m) + (\lambda_n x_n - A x_n) + (\lambda_m - \lambda_n) x_n \| \\
&= \| -y + y + (\lambda_m - \lambda_n) x_n \| \\
&= \| x_n \| \, |\lambda_m - \lambda_n| \leq C |\lambda_m - \lambda_n|.
\end{aligned}$$

Dado que $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de cauchy, también los es $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y por lo tanto converge a algún $x \in X$. De donde se tiene que $A x_n \to \lambda x - y$ cuando $n \to \infty$. Como A es cerrado, $x \in D(A)$ y $(\lambda I - A)x = y$, tenemos que $\lambda \in \mathcal{C}$. Luego $\mathcal{C}$ es cerrado en $(0, \infty)$. Se sabe que $(0, \infty)$ es conexo, por lo tanto $\mathcal{C} = (0, \infty)$.

De otro lado, si A es el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo de contracción $T(t)$, en X, entonces por el teorema de Hille-Yosida se tiene que $(0, \infty) \subseteq \rho(A)$ y por lo tanto $Im(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$. Además, si $x \in D(A)$, $x^* \in F(x)$ entonces

$$|\langle T(t)x, x^* \rangle| \leq \| T(t)x \| \| x^* \| \leq \| x \|^2 .$$

Luego,

$$Re\langle T(t)x - x, x^* \rangle = Re\langle T(t)x, x^* \rangle - \| x \|^2 \leq 0. \tag{1.62}$$

Dividiendo (1.62) por $t > 0$ y tomando $t \to 0$ se tiene que

$$Re\langle Ax, x^* \rangle \leq 0. \tag{1.63}$$

La desigualdad (1.63) *se tiene para todo* $x^* \in F(x)$*, como se quería demostrar.*

□

Corolario 1.6.6 *Sea* A *un operador lineal cerrado con dominio denso en* X*. Si tanto* A *como* A^* *son disipativos, entonces* A *es el generador infinitesimal de un* C_0*-semigrupo de contracción en* X*.*

Demostración. *Por la parte (a) del teorema de Lumer-Phillips es suficiente probar que* $Im(I - A) = X$*. Dado que* A *es disipativo y cerrado* $Im(I - A)$ *es un subespacio cerrado de* X*. Si* $Im(I - A) \neq X$ *entonces debe existir un* $x^* \in X^*$*,* $x^* \neq 0$ *tal que* $\langle x - Ax, x^* \rangle = \langle x, x^* \rangle - \langle Ax, x^* \rangle = 0$ *con* $x \in D(A)$ *(ver [4], capítulo 5, pag. 129). Esto implica que* $x^* - A^*x^* = 0$*. Dado que* A^* *es también disipativo entonces por el teorema* (1.6.4) *se sigue que* $x^* = 0$*, lo cual contradice la escogencia de* x^**.*

□

En adición a lo anterior, si A es disipativo con dominio $D(A) \subseteq X$, decimos que es *maximal disipativo* si no es la restricción propia de cualquier otro operador disipativo. Ahora, en equivalencia, si A es un operador disipativo con dominio denso en X entonces $Im(I - A) = X$ si y sólo si A es maximal disipativo. Para más detalles dirigimos al lector a [6].

Definición 1.6.7 *Un operador disipativo* A *para el cual* $Im(I - A) = X$*, es llamado maximal disipativo o simplemente m-disipativo.*

Observe que si A es *m-disipativo* entonces $Im(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$, y por lo tanto el teorema de *Lumer-Phillips* puede enunciarse en términos de operadores *m-disipativos* así: un operador A con dominio denso en el espacio es el generador infinitesimal de un C_0*-semigrupo* de contracción si y sólo si A es *m-disipativo.*

Capítulo 2

El teorema de Stone

En este capítulo se darán algunas generalizaciones de los teoremas probados anteriormente para semigrupos de contracción, además, se extenderá el concepto de semigrupo al concepto de *grupo* para operadores lineales acotados, introduciendo así las herramientas necesarias para demostrar el teorema de *Stone*. También hace la demostración de dos resultados de la teoría de perturbación de semigrupos, indispensables para nuestro propósito.

Anteriormente se dieron dos caracterizaciones diferentes para el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo de contracción, los teoremas de $Hille$-$Yosida$ y el de *Lumer-Phillips* . Ahora se dirige el estudio a la caracterización general del generador de un C_0-semigrupo de operadores lineales acotados, es decir, un semigrupo que satisface $\| T(t) \| \leq Me^{wt}$. Se mostrara que para caracterizar el generador infinitesimal en el caso general, basta con caracterizar los generadores infinitesimales de los C_0-semigrupos uniformemente acotados. Esto se hará renormando el espacio de Banach X de modo que el C_0-semigrupo uniformemente acotado sea, en la nueva norma, un C_0-semigrupo de contracción, esto con el fin de utilizar las caracterizaciones previamente probadas.

2.1. Caracterización del generador infinitesimal de un semigrupo de clase C_0

Comencemos ahora con el lema que permitirá renormar el espacio.

Lema 2.1.1 *Sea A un operador lineal para el cual $(0, \infty) \subset \rho(A)$. Si*

$$\| \lambda^n R(\lambda : A)^n \| \leq M \quad para \quad n = 1, 2, ..., \ \lambda > 0. \tag{2.1}$$

entonces existe una norma $|\cdot|$ *en* X *que es equivalente a la norma original* $\|\cdot\|$ *en* X *que satisface:*

$$\| x \| \leq |x| \leq M \| x \| \quad para \quad x \in X, \tag{2.2}$$

y además

$$|\lambda R(\lambda : A)x| \leq |x| \quad para \quad x \in X, \quad \lambda > 0. \tag{2.3}$$

Demostración. *Sea* $\mu > 0$ *y consideremos*

$$\| x \|_\mu = \sup_{n>0} \| \mu^n R(\mu : A)^n x \| . \tag{2.4}$$

Entonces se tiene que,

$$\| x \| \leq \| x \|_\mu \leq M \| x \| \tag{2.5}$$

y

$$\| \mu R(\mu : A) \|_\mu \leq 1. \tag{2.6}$$

Afirmamos que

$$\| \lambda R(\lambda : A) \|_\mu \leq 1 \quad para \quad 0 < \lambda \leq \mu. \tag{2.7}$$

En efecto, si $y = R(\lambda : A)x$ *entonces por propiedades del operador resolvente se tiene que* $y = R(\mu : A)(x + (\mu - \lambda)y)$ *y por* (2.6),

$$\| y \|_\mu \leq \frac{1}{\mu} \| x \|_\mu + \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \| y \|_\mu,$$

de donde se tiene que $\lambda \| y \|_\mu \leq \| x \|_\mu$*, lo cual verifica* (2.7)*. De* (2.5) *y* (2.7) *se sigue que*

$$\| \lambda^n R(\lambda : A)^n x \| \leq \| \lambda^n R(\lambda : A)^n x \|_\mu \leq \| x \|_\mu \quad para \quad 0 < \lambda \leq \mu. \tag{2.8}$$

Tomando el supremo sobre todos los $n \geq 0$ *en el lado izquierdo de* (2.8) *implica que* $\| x \|_\lambda \leq \| x \|_\mu$ *para* $0 < \lambda \leq \mu$*. Ahora se define*

$$|x| = \lim_{\mu\to\infty} \| x \|_\mu \ . \tag{2.9}$$

Entonces, (2.2) *se sigue de* (2.5)*. Tomando* $n = 1$ *en* (2.8) *entonces es claro*

que $\| \lambda R(\lambda : A)x \|_\mu \leq \| x \|_\mu$ *y tomando* $\mu \to \infty$ *se obtiene* (2.3).

$\square$

Teorema 2.1.2 *Un operador lineal* A *es el generador infinitesimal de un* C_0*-semigrupo* $T(t)$*, que satisface* $\| T(t) \| \leq M$ $(M \geq 1)$*, si y sólo si*

(i) Aes cerrado y $D(A)$ *es denso en* X.

(ii) El conjunto resolvente $\rho(A)$ *contiene a* $\mathbb{R}^+$ *y*

$$\| R(\lambda : A)^n \| \leq \frac{M}{\lambda^n} \quad para\ \lambda > 0, \quad n = 1, 2..... \tag{2.10}$$

Demostración. *Sea* $T(t)$ *un* C_0*-semigrupo en un espacio de Banach* X *y sea* A *el generador infinitesimal de este semigrupo. Si cambiamos la norma en* X *por una norma equivalente,* $T(t)$ *sigue siendo un* C_0*-semigrupo en* X *con la nueva norma. El generador infinitesimal* A *no cambia ni el echo de que* A *es cerrado y denso cuando pasamos a una norma equivalente en* X*, pues las propiedades topológicas del espacio son independientes de la norma equivalente de la cual está dotado el espacio.*

Sea A *el generador infinitesimal de un* C_0*-semigrupo que satisface* $\| T(t) \| \leq M$*. Definimos,*

$$|x| = \sup_{t\geq 0} \| T(t)x \| \ . \tag{2.11}$$

Entonces, se tiene que

$$\| x \| \leq |x| \leq M \| x \|, \tag{2.12}$$

y por lo tanto $|\cdot|$ *es una norma en* X *la cual es equivalente a la norma original* $\| x \|$ *en* X*. Dado que,*

$$|T(t)x| = \sup_{t\geq 0} \| T(s)T(t)x \| \leq \sup_{s\geq 0} \| T(s)x \| = |x|, \tag{2.13}$$

$T(t)$ es un C_0-semigrupo de contracción en X dotado con la norma $|\cdot|$. Por el teorema de Hille-Yosida y por las observaciones al inicio de la demostración A es cerrado y $D(A)$ es denso en el espacio X, además $|R(\lambda : A)| \leq \lambda^{-1}$ para $\lambda > 0$. Por lo tanto por (2.12) y (2.13) se tiene que

$$\| R(\lambda : A)^n x \| \leq |R(\lambda : A)^n x| \leq \lambda^{-n}|x| \leq M\lambda^{-n} \| x \|, \tag{2.14}$$

y por lo tanto, las condiciones (i) y (ii) son necesarias.

Ahora, supongamos que las condiciones (i) y (ii) se satisfacen. Por el lema (2.1.1) existe una norma en X que satisface (2.2) y (2.3). Considerando X con esta norma, A es un operador cerrado con dominio denso en X, además $(0, \infty) \subset \rho(A)$ y $|R(\lambda) : A| \leq \lambda^{-1}$ para $\lambda > 0$. Luego por el teorema de Hille-Yosida, A es el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo de contracción en X dotado con la norma $|\cdot|$. Volviendo a la norma original, A sigue siendo el generador infinitesimal de $T(t)$ y

$$\| T(t)x \| \leq |T(t)x| \leq |x| \leq M \| x \| .$$

Por lo tanto $\| T(t) \| \leq M$. De donde concluimos, finalmente, que las condiciones (i) y (ii) son suficientes.

$\square$

Si $T(t)$ es un C_0-*semigrupo* en X entonces, por el teorema (1.4.5), existe una constante $M \geq 1$ y $w \geq 0$ tal que

$$\| T(t)x \| \leq Me^{wt}. \tag{2.15}$$

Consideremos el C_0-*semigrupo* $S(t) = e^{-wt}T(t)$ entonces $\| S(t) \| \leq M$ y A es el generador infinitesimal de $T(t)$ si y sólo si $A - wI$ es el generador infinitesimal de $S(t)$. Usando estas observaciones junto con el teorema (2.1.2) se obtiene el siguiente teorema, que es una generalización del teorema de Hille-Yosida para semigrupos de contracción.

Teorema 2.1.3 *Un operador lineal A es el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo $T(t)$, que satisface $\| T(t) \| \leq Me^{wt}$ $(M \geq 1)$, si y sólo si*

(i) A es cerrado y $D(A)$ es denso en X.

(ii) El conjunto resolvente $\rho(A)$ de A contiene en rayo (w, ∞) y

$$\| R(\lambda : A)^n \| \leq \frac{M}{(\lambda - w)^n} \quad para\ \lambda > w, \quad n = 1, 2..... \tag{2.16}$$

Como un generalización del corolario (1.5.6) se tiene el siguiente teorema para semigrupos que satisfacen $\| T(t) \| \leq Me^{wt}$.

Teorema 2.1.4 *Sea A el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo $T(t)$ en X. Si A_λ es la aproximación de Yosida de A, entonces*

$$T(t)x = \lim_{\lambda \to \infty} e^{tA_\lambda} x. \tag{2.17}$$

Demostración. *Consideremos el caso en el que $\| T(t) \| \leq M$. De acuerdo a la demostración del teorema (2.1.2) se puede definir una norma $|||\cdot|||$ en X, que es equivalente con la norma original $\| \cdot \|$, para la cual $T(t)$ es un semigrupo de contracción. Por el corolario (1.5.6) se tiene que $|||e^{tA_\lambda x} - T(t)x||| \to 0$ cuando $\lambda \to \infty$ para todo $x \in X$. Dado que $||| \cdot |||$ es equivalente con $\| \cdot \|$ entonces se concluye en resultado (2.17). Considerando el caso general $\| T(t) \| \leq Me^{wt}$ se tiene que para $w \leq 0$, $\| T(t) \| \leq M$ y por lo que se acabo de probar, el resultado se obtiene de nuevo. Ahora sea $w > 0$ y notese que la aplicación $\lambda \to \| e^{tA_\lambda} \|$ es acotada para $\lambda > 2w$. En efecto,*

$$\begin{aligned} \| e^{tA_\lambda} \| &= e^{-\lambda t} \| e^{\lambda^2 R(\lambda:A)} \| \\ &\leq e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} t^k \| R(\lambda : A)^k \|}{k!} \leq Me^{(\frac{\lambda w}{\lambda - w})t} \leq Me^{2wt}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Ahora consideremos el semigrupo uniformemente acotado $S(t) = e^{-wt}T(t)$, cuyo generador infinitesimal es $A - wI$. Luego de la primera parte de la prueba se tiene que

$$T(t)x = \lim_{\lambda \to \infty} e^{t(A - wI)_\lambda + wt} x \quad para\ x \in X. \tag{2.19}$$

Mediante un calculo directo se puede mostrar que

$$(A - wI)_\lambda + wI = A_{\lambda + w} + H(\lambda),$$

donde

$$\begin{aligned} H(\lambda) &= 2wI - w(w + 2\lambda)R(\lambda + w : A) \\ &= w[wR(\lambda + w : A) - 2AR(\lambda + w : A)]. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\| H(\lambda) \| \leq 2w + (2w + \lambda^{-1}w^2)M$ *y además para* $x \in D(A)$ $\| H(\lambda)x \| \leq M\lambda^{-1}(w^2 \| x \| + 2w \| Ax \|) \to 0$ *cuando* $\lambda \to \infty$. *Luego* $H(\lambda)x \to 0$ *cuando* $\lambda \to \infty$. *De acuerdo a* (1.19) *se sigue que*

$$\| e^{tH(\lambda)}x - x \| \leq t \| H(\lambda)x \| e^{t\|H(\lambda)\|},$$

y por lo tanto,

$$\lim_{\lambda \to \infty} e^{tH(\lambda)}x = x \quad para\ x \in X. \tag{2.20}$$

Finalmente, dado que $H(\lambda)$ *y* $A_{\lambda+w}$ *conmutan se tiene que*

$$\| e^{tA_\lambda}x - T(t)x \| \leq \| e^{tA_\lambda + tH(\lambda-w)}x - T(t)x \| + \| e^{tA_\lambda} \| \| e^{tH(\lambda-w)}x - x \| .$$

Si $\lambda \to \infty$ *el primer termino del lado derecho de la desigualdad tiende a cero por* (2.19), *mientras que el segundo termino tiende a cero por* (2.18) *y* (2.20). *Luego,*

$$\lim_{\lambda \to \infty} e^{tA_\lambda}x = T(t)x \quad para\ x \in X.$$

□

2.2. Grupos de operadores lineales acotados

Definición 2.2.1 *Una uniparamétrica familia* $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, *de operadores lineales acotados en un espacio de Banach* X *es un* C_0*-grupo de operadores acotados si satisface*

(i) $T(0) = I$,

(ii) $T(t + s) = T(t)T(s), \quad para\ -\infty < t, s < \infty.$

(iii) $\lim_{t\to 0} T(t)x = x \quad para\ x \in X.$

Definición 2.2.2 *El generador infinitesimal A de un grupo $T(t)$ está definido por*

$$Ax = \lim_{t \to 0} \frac{T(t)x - x}{t}, \tag{2.21}$$

siempre que el límite exista; el dominio de A es el conjunto de todos los elementos $x \in X$ para los cuales el límite (2.21) *existe.*

Note que en (2.21) $t \to 0$ por ambos lados y no solo $t \to 0^+$ como en el caso del generador infinitesimal de un C_0-semigrupo.

Ejemplo 2.2.3 *Para ilustrar la noción de grupo de operadores, consideremos el problema de valor inicial asociado a la ecuación de Schödinger, definido así*

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u = 0, & \mathbb{R}^n \times (-\infty, \infty) \\ \qquad u = f, & \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \tag{2.22}$$

Aplicando transformada de Fourier se tiene $\hat{u}_t = -i|\xi|^2 \hat{u}$, por lo tanto, la solución del problema se puede escribir en la forma

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-it|\xi|^2} \hat{f})(x). \tag{2.23}$$

Para $t \in \mathbb{R}$, el operador $T(t) : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$, definido como

$$T(t)f = \mathcal{F}^{-1}(e^{-it|\xi|^2} \hat{f}), \tag{2.24}$$

es un grupo de operadores lineales acotados, cuyo generador infinitesimal es el operador $i\Delta$. La prueba de esto es análoga a la que se realizo en el ejemplo (1.4.3) *para la ecuación del calor.*
Mediante el uso de las propiedades de la transformada de Fourier, se puede mostrar que la expresión dada en (2.23) *para la solución u se puede dar de manera explícita como*

$$u(x,t) = (4\pi i t)^{-(n/2)} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i|x-y|^2}{4t}} f(y) dy. \tag{2.25}$$

Para los detalles referimos al lector a [2].

Sea $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ un C_0-grupo. Por la definición es claro que para $t \geq 0$, $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ es un C_0-semigrupo cuyo generador infinitesimal es A. De otro lado, para $t \geq 0$, $S(t) = T(-t)$ es también un C_0-semigrupo con generador infinitesimal igual a $-A$. Por lo tanto si $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ es un C_0-grupo en X , tanto A como $-A$ son los generadores infinitesimales de los C_0-semigrupos que denotamos por $T_+(t)$ y $T_-(t)$ respectivamente. Por el contrario, si A y $-A$ son los generadores infinitesimales de los C_0-semigrupos $T_+(t)$ y $T_-(t)$, entonces a continuación se vera que A es el generador infinitesimal del C_0-grupo dado por

$$T(t) = \begin{cases} T_+(t) & para\ t \geq 0 \\ \\ T_-(-t) & para\ t \leq 0. \end{cases} \tag{2.26}$$

Teorema 2.2.4 *Un operador lineal A es el generador infinitesimal de un C_0-grupo $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, que satisface $\| T(t) \| \leq Me^{w|t|}$ $(M \geq 1)$, si y sólo si*

(i) A es cerrado y $D(A)$ es denso en X.

(ii) Para todo real λ, $|\lambda| > w$, esta en el conjunto resolvente $\rho(A)$ y

$$\| R(\lambda : A)^n \| \leq \frac{M}{(|\lambda| - w)^n} \quad n = 1, 2..... \tag{2.27}$$

Demostración. *Las condiciones necesarias se siguen del hecho de que A y $-A$ son los generadores infinitesimales de C_0-semigrupos de operadores lineales acotados que satisfacen $\| T(t) \| \leq Me^{wt}$. Ya que A es el generador infinitesimal de tal semigrupo se deduce del teorema (2.1.3) que A es cerrado, $\overline{D(A)} = X$ y el estimativo (2.27) se satisface para $\lambda > w$. Además, dado que $-A$ también es el generador infinitesimal de tal semigrupo y claramente se tiene que $R(\lambda : A) = -R(-\lambda : -A)$, por lo tanto (2.27) se satisface para $-\lambda < -w$. Luego las condiciones (i) y (ii) son necesarias.*

Si las condiciones (i) y (ii) se satisfacen entonces del teorema (2.1.3) se tiene que A y $-A$ son los generadores infinitesimales de los C_0-semigrupos $T_+(t)$ y $T_-(t)$ y también $\| T_{\pm}(t) \| \leq Me^{wt}$. Los semigrupos $T_+(t)$ y $T_-(t)$ conmutan pues e^{tA_λ} y e^{-tA_μ} conmutan, donde A_v es la aproximación de Yosida de A. Por lo tanto por el teorema (2.1.4), $T_+(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x$ y $T_-(t)x = \lim_{\mu\to\infty} e^{tA_\mu}x$. Teniendo en cuenta lo mencionado anteriormente, si $W(t) = T_+(t)T_-(t)$ entonces $W(t)$ es un C_0-semigrupo de operadores lineales acotados para $t \geq 0$. Para $x \in D(A) = D(-A)$ se tiene que

$$\lim_{t\to 0} \frac{W(t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0} T_-(t)\frac{T_+(t)x - x}{t} + \lim_{t\to 0} \frac{T_-(t)x - x}{t} = Ax - Ax = 0. \tag{2.28}$$

Por lo tanto, para $x \in D(A)$ se tiene que $W(t)x = x$. Dado que $D(A)$ es denso en X y $W(t)$ es acotado resulta que $W(t) = I$, es decir $T_-(t) = (T_+(t))^{-1}$. Ahora definiendo

$$T(t) = \begin{cases} T_+(t) & \text{para } t \geq 0 \\ \\ T_-(-t) & \text{para } t \leq 0, \end{cases} \tag{2.29}$$

se obtiene un C_0-grupo de operadores lineales acotados que satisfacen $\| T(t) \| \leq Me^{w|t|}$. Por lo tanto las condiciones (i) y (ii) son suficientes.

$\square$

Lema 2.2.5 *Sea $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ un C_0-semigrupo. Si para todo $t > 0$, $T(t)^{-1}$ existe y es un operador lineal acotado entonces $S(t) = T(t)^{-1}$ es un C_0-semigrupo cuyo generador infinitesimal es $-A$. Además si*

$$U(t) = \begin{cases} T(t) & \text{para } t \geq 0 \\ \\ T(-t)^{-1} & \text{para } t \leq 0, \end{cases} \tag{2.30}$$

$U(t)$ es un C_0-grupo de operadores lineales acotados.

Demostración. *La propiedad de semigrupo para $S(t)$ se tiene de manera inmediata pues*

$$S(t+s) = T(t+s)^{-1} = (T(t)T(s))^{-1} = T(t)^{-1}T(s)^{-1} = S(t)S(s).$$

Para verificar la continuidad fuerte consideremos $s > t > 0$ y $x \in X$. Dado que para $s > 0$ el rango de $T(s)$ es todo X, existe un $y \in X$ tal que $T(s)y = x$.

$$\begin{aligned} \| T(t)^{-1}x - x \| &= \| T(t)^{-1}T(s)y - T(s)y \| \\ &= \| T(t)^{-1}T(t)T(s-t)y - T(s)y \| \\ &= \| T(s-t)y - T(s)y \|, \end{aligned} \tag{2.31}$$

donde $\| T(s-t)y - T(s)y \| \to 0$ *si* $t \to 0$*. Por lo tanto,* $S(t)$ *es fuertemente continuo. Finalmente, para* $x \in D(A)$ *se tiene que*

$$\lim_{t\to 0} \frac{T(t)^{-1}x - x}{t} = \lim_{t\to 0} T(t)\frac{T(t)^{-1}x - x}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{x - T(t)x}{t} = -Ax,$$

y por lo tanto $-A$ *es el generador infinitesimal de* $T(t)^{-1}$*. Con lo anteriormente probado y de acuerdo a le definición* (2.2.1)*, es inmediato verificar que en efecto el operador* $U(t)$*, definido en* (2.30)*, es un* C_0*-grupo.*

□

2.3. Teorema de Stone

Para cualquier operador lineal sobre un espacio de Hilbert puede definirse su operador adjunto. Este es una generalización del concepto de matriz adjunta al caso de espacios de dimensión infinita.

Definición 2.3.1 *Sea* $A : D(A) \subset H \to H$ *un operador lineal sobre un espacio de Hilbert* H *con producto interno* $(\ ,\ )$*. Si* $y \in H$*, y para cada* $x \in D(A)$ *se tiene que,*

$$(Ax, y) = (x, z) \tag{2.32}$$

para algún $z \in H$*, entonces se dice que* y *está en el dominio del operador adjunto de* A*, denotado por* A^**, y que* z *es la imagen de* y *por dicho operador, es decir* $z = A^*y$*.*

El operador adjunto A^* es único, pues si consideramos que A' es otro operador adjunto de A, entonces

$$(Ax, y) = (x, A^*y) = (x, A'y).$$

Por lo tanto $A^*y = A'y$, de donde se tiene que $A^* = A'$.

Ejemplo 2.3.2 *Para* $f \in C[0,1]$*, el conjunto de las funciones continuas en* $[0,1]$*, considere el operador lineal definido por*

$$(T_f g)(t) = f(t)g(t).$$

Primero, es fácil ver que $T_f \in B(L^2[0,1])$*, puesto que son funciones continuas el el compacto* $[0,1]$*. Veamos que si* $f \in C[0,1]$*, entonces* $(T_f)^* = T_{\overline{f}}$*. En* *efecto, sea $g, h \in L^2[0,1]$ y $k = (T_f)^* h$. Entonces, por la definición de operador adjunto $(T_f g, h) = (g, k)$. Por lo tanto,*

$$\int_0^1 f(t)g(t)\overline{h(t)}\ dt = \int_0^1 g(t)\overline{k(t)}\ dt. \tag{2.33}$$

La igualdad (2.33) es cierta si $\overline{k(t)} = \overline{h(t)}f(t)$, que es equivalente a, $k(t) = \overline{f(t)}h(t)$. Dado que el operador adjunto es único, entonces se deduce que $(T_f)^* h = k = \overline{f}$, y así $(T_f)^* = T_{\overline{f}}$.

Definición 2.3.3 *Sea H un espacio de Hilbert con producto interno $(\ ,\ )$. Un operador A en H es simétrico si $\overline{D(A)} = H$ y $A \subset A^*$, es decir, $(Ax, y) = (x, Ay)$ para todo $x, y \in D(A)$. A es auto-adjunto si $A = A^*$; además un operador U es unitario si $U^* = U^{-1}$.*

Ejemplo 2.3.4 *Sea $P : D(P) \subset L^2 \to L^2$ el operador definido por*

$$Pf = -if',$$

donde $D(P)$ es el subespacio de L^2 de las funciones diferenciables, cuya derivada está a su vez en L^2. Mediante integración, por partes se tiene que

$$(Pf, g) = \int (Pf)g^* = -i \int f'g^* = i \int fg'^* = \int f(-ig')^* = (f, Pg).$$

Para que g esté en el dominio del operador adjunto P^*, además de ser diferenciable, $-ig'$ debe pertenecer a L^2. Por lo tanto, $D(P^*)$ y $D(P)$ son iguales, y $P = P^*$. Así, P es auto-adjunto.

Encontrar explícitamente un operador auto-adjunto no siempre resulta una tarea fácil, pero hay criterios que permiten deducir cuando un operador es auto-adjunto sin entrar en un calculo directo de dicho operador. El siguiente teorema es una herramienta muy útil que se usa para demostrar cuando un operador simétrico es un operador auto-adjunto.

Teorema 2.3.5 *Si A es un operador simétrico en un espacio de Hilbert H tal que $Im(A \pm i) = H$, entonces A es auto-adjunto.*

Demostración. *Si $y \in D(A^*)$, entonces existe un $x \in D(A)$ tal que $(A - i)x = (A^* - i)y$. Ahora, dado que A es simétrico, $D(A) \subset D(A^*)$ y por lo tanto $(A^* - i)(x - y) = 0$. Como*

$$Ker(A^* - i) = Ker(A + i)^* = (Im(A + i))^{\perp} = H^{\perp} = \{0\},$$

se sigue que $x = y$ y por lo tanto $y \in D(A)$. Así se mostró que $D(A^*) \subseteq D(A)$, lo cual implica que $D(A^*) = D(A)$. Entonces, $A = A^*$ y por definición A es auto-adjunto.

$\square$

Una observación del teorema anterior es que también es verdadero para cuando el rango de $A \pm i$ es denso en el espacio, es decir, $\overline{Im(A \pm i)} = H$. La demostración es análoga, adicionando que

$$\begin{aligned} Ker(A^* - i) = Ker(A + i)^* &= (Im(A + i))^{\perp} \\ &= \big((Im(A + i)^{\perp})^{\perp}\big)^{\perp} = H^{\perp} = \{0\}, \end{aligned}$$

pues $(Im(A + i)^{\perp})^{\perp} = \overline{Im(A + i)}$. Dirigimos al lector a ([4], capítulo 3) para una observación detallada de las propiedades relativas al complemento ortogonal.

Teorema 2.3.6 *U es un operador unitario en H si y sólo si $Im(U) = H$ y U es una isometría.*

Demostración. *Sea U un operador unitario. Por definición se tiene que $UU^* = U^*U = I$, por lo tanto $(Ux, Uy) = (x, U^*Uy) = (x, y)$ con $x, y \in H$, es decir U es una isometría y además es sobreyectiva, pues la ecuación $Ux = y$ siempre tiene solución tomando $x = U^*y$.*

Supongamos que U es una isometría sobreyectiva, es decir $U^*U = I$ y $Im(U) = H$. Solo se requiere demostrar que $UU^* = I$. Si $y \in H$ entonces existe un $x \in H$ tal que $Ux = y$, luego $x = U^*Ux = U^*y$. Claramente $UU^*y = Ux = y$, de donde se tiene que $UU^* = I$, por lo tanto U es un operador unitario.

$\square$

Teorema 2.3.7 *(Stone). A es el generador infinitesimal de un C_0-grupo de operadores unitarios en un espacio de Hilbert H si y sólo si iA es auto-adjunto.*

Demostración. *Si A es el generador infinitesimal de un de un C_0-grupo de operadores unitarios $U(t)$, entonces por el corolario (1.4.9) A tiene dominio denso en H y para $x \in D(A)$,*

$$-Ax = \lim_{t\to 0} \frac{U(-t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{U(t)^*x - x}{t} = A^*x,$$

lo cual implica que $A = -A^*$ *y por lo tanto* $iA = (iA)^*$, *es decir* iA *es auto-adjunto.*

Si iA *es auto-adjunto entonces, por definición,* A *tiene dominio denso en el espacio y* $A = -A^*$. *Por lo tanto para cada* $x \in D(A)$ *se tiene que*

$$(Ax, x) = (x, A^*x) = -(x, Ax) = -\overline{(Ax, x)},$$

y así $Re(Ax, x) = 0$ *para todo* $x \in D(A)$, *es decir,* A *es disipativo. Dado que* $A = -A^*$ *entonces* $Re(A^*x, x) = 0$ *para todo* $x \in D(A^*) = D(A)$ *de donde se tiene que* A^* *también es disipativo. Se sabe que* A *y* A^* *son cerrados y dado que* $A^{**} = A$ *entonces, por el corolario (1.6.6), tanto* A *y* $A^* = -A$ *son los generadores infinitesimales de* C_0*-semigrupos de conracción en* H. *Si* $U_+(t)$ *y* $U_-(t)$ *son los semigrupos generados por* A *y* A^* *respectivamente se define*

$$U(t) = \begin{cases} U_+(t) & \textit{para } t \geq 0 \\ \\ U_-(-t) & \textit{para } t \leq 0. \end{cases} \tag{2.34}$$

Entonces, como se observó en el teorema (2.2.4), $U(t)$ *es un grupo y dado que* $U(t)^{-1} = U(-t)$, $\| U(t) \| \leq 1$, $\| U(-t) \| \leq 1$ *se tiene que* $Im(U(t)) = X$ *y* $U(t)$ *es una isometría para todo t y por el teorema (2.3.6)* $U(t)$ *es un grupo de operadores unitarios en* H.

□

2.4. Teoremas de perturbación

Para el problema de valor inicial asociado a la ecuación de Schrödinger con potencial variable, se requiere además del teorema de Stone, un resultado de perturbación de semigrupos.

Teorema 2.4.1 *Sea* X *un espacio de Banach y sea* A *el generador infinitesimal de un* C_0*-semigrupo* $T(t)$ *en* X, *que satisface* $\| T(t) \| \leq Me^{wt}$. *Si* B *es un operador lineal acotado en* X *entonces* $A + B$ *es el generador infinitesimal de un* C_0*-semigrupo* $S(t)$ *en* X *y además* $\| S(t) \| \leq Me^{(w+M\|B\|)t}$.

Demostración. *Por el lema* (2.1.1) *y el teorema* (2.1.3) *se sigue que existe una norma* $|\cdot|$ *en* X *tal que* $\| x \| \leq |x| \leq M \| x \|$ *para todo* $x \in X$, $|T(t)| \leq e^{wt}$ *y* $|R(\lambda : A)| \leq (\lambda - w)^{-1}$ *con* $\lambda > w$. *Por lo tanto, para* $\lambda > w + |B|$ *el operador acotado* $BR(\lambda : A)$ *satisface* $|BR(\lambda : A)| < 1$ *y así por el teorema* (1.3.5), $I - BR(\lambda : A)$ *es invertible para* $\lambda > w + |B|$. *Sea*

$$R = R(\lambda : A)(I - BR(\lambda : A))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} R(\lambda : A)(BR(\lambda : A))^k, \qquad (2.35)$$

entonces

$$(\lambda I - A - B)R = (I - BR(\lambda : A))^{-1} - BR(\lambda : A)(I - BR(\lambda : A))^{-1} = I,$$

y

$$\begin{aligned} R(\lambda I - A - B)x &= R(\lambda : A)(\lambda I - A - B)x \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} R(\lambda : A)(BR(\lambda : A))^k(\lambda I - A - B)x \\ &= x - R(\lambda : A)Bx + \sum_{k=1}^{\infty}(R(\lambda : A)B)^k x - \sum_{k=2}^{\infty}(R(\lambda : A)B)^k x \\ &= x, \end{aligned}$$

para todo $x \in D(A)$. *Por lo tanto el resolvente de* $A+B$ *existe para* $\lambda > w + |B|$ *y esta dado por el operador* R. *Además*

$$\begin{aligned} |(\lambda I - A - B)^{-1}| &= \Big| \sum_{k=0}^{\infty} R(\lambda : A)(BR(\lambda : A))^k \Big| \\ &\leq (\lambda - w)^{-1}(1 - |BR(\lambda : A)|)^{-1} \leq (\lambda - w - |B|)^{-1}. \end{aligned}$$

Por el corolario (1.5.8) *se sigue que* $A + B$ *es el generador infinitesimal de un* C_0-*semigrupo* $S(t)$, *que satisface* $|S(t)| \leq e^{(w+M\|B\|)t}$. *Volviendo a la norma original* $\| \cdot \|$ *en* X *se tiene que*

$$\| S(t) \| \leq M e^{(w+M\|B\|)t}.$$

$\square$

Teorema 2.4.2 *Sean A y B operadores lineales en X tal que $D(A) \subset D(B)$ y $A+tB$ es disipativo para $0 \leq t \leq 1$. si*

$$\| Bx \| \leq \alpha \| Ax \| + \beta \| x \| \quad para \;\; x \in D(A) \tag{2.36}$$

donde $0 \leq \alpha \leq 1$, $\beta \geq 0$ y para algún $t_0 \in [0,1]$, $A + t_0 B$ es m-disipativo entonces $A+tB$ es m-disipativo para todo $t \in [0,1]$.

Demostración. *Se demostrara que existe un $\delta > 0$ tal que si $A + t_0B$ es m-disipativo, $A+tB$ es m-disipativo para todo $t \in [0,1]$ donde $|t - t_0| \leq \delta$. El resultado se deduce por el echo de que cualquier punto en $[0,1]$ puede ser alcanzado desde cualquier otro punto por un número finito de intervalos de longitud δ o menor.*

Supongamos que para algún $t_0 \in [0,1]$ $A + t_0B$ es m-disipativo. Entonces $I - (A + t_0B)$ es invertible. Sea $(I - (A + t_0B))^{-1} = R(t_0)$, por lo tanto se tiene que $\| R(t_0) \| \leq 1$. Ahora se mostrara que $BR(t_0)$ es un operador lineal acotado. Por (2.36) y por la desigualda triangular se tiene que para $x \in D(A)$

$$\begin{aligned} \| Bx \| &\leq \alpha \| (A+t_0B)x \| + \alpha t_0 \| Bx \| + \beta \| x \| \\ &\leq \alpha \| (A+t_0B)x \| + \alpha \| Bx \| + \beta \| x \|, \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\| Bx \| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \| (A+t_0B)x \| + \frac{\beta}{1-\alpha} \| x \| . \tag{2.37}$$

Dado que $R(t_0) : X \to D(A)$ y a demás como $(A + t_0B)R(t_0) = I$ entonces $(A+t_0B)R(t_0) = R(t_0) - I$. Por (2.37) se sigue que

$$\begin{aligned} \| BR(t_0)x \| &\leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \| (R(t_0) - I)x \| + \frac{\beta}{1-\alpha} \| R(t_0)x \| \\ &\leq \frac{2\alpha+\beta}{1-\alpha} \| x \| \quad para\ todo\ x \in X, \end{aligned} \tag{2.38}$$

y por lo tanto $BR(t_0)$ es acotado. Para demostrar que $A+tB$ es m-disipativo se mostrara que $I-(A+tB)$ es invertible y así su rango es todo X. Dado que

$$\begin{aligned} I - (A+tB) &= I - (A+t_0B) + (t_0 - t)B \\ &= (I + (t_0 - t)BR(t_0))(I - (A+t_0B)). \end{aligned} \tag{2.39}$$

Por lo tanto $I-(A+tB)$ *es invertible si y sólo si* $(I+(t_0-t)BR(t_0))$ *es invertible. Pero* $I-(t-t_0)BR(t_0)$ *es invertible para cualquier* t *tal que* $|t-t_0| < (1-\alpha)(2\alpha+\beta)^{-1} \leq \| BR(t_0) \|^{-1}$ *y por lo tanto tomando* $\delta = (1-\alpha)(4\alpha+2\beta)^{-1}$ *y empleando el teorema* (1.3.5)*, se concluye la demostración.*

$\square$

Capítulo 3

Aplicación del teorema de Stone

Ahora, como una aplicación de la teoría de semigrupos, desarrollada en los capítulos anteriores, se considera el problema de valor inicial asociado a la ecuación lineal de Schrödinger no estacionaria con potencial variable dado por

$$\begin{cases} \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - V(x)u \\ \\ u(x,0) = f(x), \end{cases} \tag{3.1}$$

donde $u = u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, la función $V = V(x)$ es llamado potencial y Δ es el operador de Laplace $\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$. Esta ecuación será considerada en el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$. El problema de valor inicial (3.1) puede escribirse en la forma (1.11) en el espacio $X = L^2$, con $A = A_0 - iV$, $A_0 = i\Delta$ y u_0 dado en el dominio del operador A.

Se define el dominio del operador potencial V en el espacio $L^2(\mathbb{R}^n)$ por,

$$D(V) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \ Vu \in L^2(\mathbb{R}^n)\}, \tag{3.2}$$

y para $u \in D(V)$, $Vu(x) = V(x)u(x)$.

Ahora para $s \geq 0$ definimos el espacio de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ como

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \left(1 + |\xi|^2\right)^{s/2} \widehat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

Definición 3.0.1 *Consideremos $D(A_0) = H^2(\mathbb{R}^n)$ y para $u \in D(A_0)$ sea*

$$A_0 u = i\Delta u. \tag{3.3}$$

Lema 3.0.2 *El operador iA_0 es auto-adjunto en el espacio $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. *Mediante integración por partes se tiene que*

$$(-\Delta u, v) = -\int_{\mathbb{R}^n} \Delta u \cdot \overline{v}\, dx = -\int_{\mathbb{R}^n} u \cdot \overline{\Delta v}\, dx = (u, -\Delta v), \tag{3.4}$$

y por lo tanto $iA_0 = -\Delta$ es simétrico. De acuerdo al teorema (2.3.5), para mostrar que es auto adjunto es suficiente mostrar que para todo λ, tal que $Im\lambda \neq 0$, el rango del operador $iA_0 \pm \lambda I$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Luego, si $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ entonces, usando la transformada de Fourier, se tiene que

$$u(x) = (2\pi)^{-(n/2)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\hat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi}}{|\xi|^2 \pm \lambda}\, d\xi \tag{3.5}$$

está en $D(A_0) = H^2(\mathbb{R}^n)$ y es solución de la ecuación $(iA_0 \pm \lambda I)u = f$. Por lo tanto el rango de de $iA_0 \pm \lambda I$ contiene a $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, el cual es denso en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

$\square$

Como una consecuencia del teorema de Stone y el lema (3.0.2) se tiene inmediatamente el siguiente corolario.

Corolario 3.0.3 *El operador A_0 es el generador infinitesimal de un grupo de operadores unitarios en el espacio $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Ejemplo 3.0.4 *En el problema de valor inicial* (3.1) *consideremos $V = V_0$, un potencial constante. Aplicando transformada de Fourier se tiene que $\hat{u}_t = -i|\xi|^2\hat{u} - iV_0\hat{u} = -i(|\xi|^2 + V_0)\hat{u}$, por lo tanto*

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\big(e^{-i(|\xi|^2+V_0)t}\widehat{f}\,\big)(x). \tag{3.6}$$

Para $t \in \mathbb{R}$, el operador $T(t) : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$, tal que

$$T(t)f = \mathcal{F}^{-1}\big(e^{-i(|\xi|^2+V_0)t}\widehat{f}\,\big), \tag{3.7}$$

es un grupo en L^2. La prueba de esto es análoga a la del ejemplo (1.4.3).

En el ejemplo anterior, note que la transformada de Fourier pudo aplicarse para resolver explícitamente la ecuación debido a que el potencial es constante. Para potenciales no constantes $V(x)$, la transformada de Fourier no puede aplicarse y el problema es de mayor dificultad, y motiva la introducción de las herramientas de análisis funcional que se han introducido en los anteriores capítulos.

Lema 3.0.5 *Sea $V(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Si $p \geq n/2$ y $p \geq 2$ entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe una constante $C(\varepsilon)$ tal que*

$$\| Vu \| \leq \varepsilon \| \Delta u \| + C(\varepsilon) \| u \| \quad para \quad u \in H^2(\mathbb{R}^n), \tag{3.8}$$

donde la norma $\| \cdot \|$ denota la norma de L^2 en $\mathbb{R}^n$.

Demostración. *Si $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$ entonces, por definición, $(1 + |\xi|^2)\hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y dado que $p > n/2$ también se tiene que $(1+|\xi|^2)^{-1} \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Usando la desigualdad de Hölder y la desigualdad de Minkowski [2], con $q = \frac{2p}{2+p}$, se tiene que*

$$\begin{aligned}
\| \hat{u} \|_q &= \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)^q| \ d\xi \Big)^{\frac{1}{q}} \\
&= \Big(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{-q} (1 + |\xi|^2)^q |\hat{u}(\xi)|^q \ d\xi \Big)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \Bigg[\Big(\int_{\mathbb{R}^n} \big((1 + |\xi|^2)^{-q}\big)^{\frac{2+p}{2}} d\xi \Big)^{\frac{1}{\frac{2+p}{2}}} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \big((1 + |\xi|^2)^q |\hat{u}(\xi)|^q\big)^{\frac{2+p}{p}} d\xi \Big)^{\frac{1}{\frac{2+p}{p}}} \Bigg]^{\frac{1}{q}} \\
&= \Big(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{-p} d\xi \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^2 |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= C_p \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \big(|\hat{u}(\xi)| + |\xi|^2 |\hat{u}(\xi)|\big)^2 \ d\xi \Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_p \Bigg[\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)|^2 \ d\xi \Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \big(|\xi|^2 |\hat{u}(\xi)|\big)^2 \ d\xi \Big)^{\frac{1}{2}} \Bigg] \\
&= C_p \big(\| \Delta u \| + \| u \| \big).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Como $p \geq 2$, $1 \leq q \leq 2$ y por el teorema clásico teorema de Hausdorff y Young (ver [7], pag 29) se tiene que $\| u \|_r \leq \| \hat{u} \|_q$ donde $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1$. Por lo tanto,

$$\| u \|_r \leq C_p \big(\| \Delta u \| + \| u \| \big). \tag{3.10}$$

Reemplazando la función $u(x)$ por $u(\rho x)$ en la desigualdad (3.10), con $\rho \geq 0$, y tomando ρ apropiadamente de tal manera que se pueda hacer el coeficiente de $\| \Delta u \|$ tan pequeño como se requiera, se tiene que

$$\frac{1}{\rho^{\frac{n}{r}}} \| u \|_r \| V \|_p \leq \frac{\rho^2}{\rho^{\frac{n}{2}}} \| V \|_p \, C_p \, \| \Delta u \| + \frac{1}{\rho^{\frac{n}{2}}} \| V \|_p \, C_p \, \| u \|,$$

que es los mismo que tener,

$$\| u \|_r \| V \|_p \leq \rho^{2+\frac{n}{r}-\frac{n}{2}} \| V \|_p C_p \| \Delta u \| + \rho^{\frac{n}{r}-\frac{n}{2}} \| V \|_p C_p \| u \| .$$

Dado $\varepsilon > 0$ tan pequeño como se desea, entonces

$$\| u \|_r \| V \|_p \leq \varepsilon \| \Delta u \| + C(\varepsilon) \| u \| . \tag{3.11}$$

Finalmente, usando la desigualdad de Hölder se tiene que

$$\begin{aligned} \| Vu \|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} V^2 u^2 \, dx &\leq \Big(\int_{\mathbb{R}} \big(|V|^2\big)^{\frac{p}{2}} \, dx \Big)^{\frac{1}{p/2}} \Big(\int_{\mathbb{R}} \big(|u|^2\big)^{\frac{r}{2}} \, dx \Big)^{\frac{1}{r/2}} \\ &= \Big(\int_{\mathbb{R}} |V|^p \, dx \Big)^{\frac{2}{p}} \Big(\int_{\mathbb{R}} |u|^r \, dx \Big)^{\frac{2}{r}}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

y por lo tanto por (3.11),

$$\| Vu \| \leq \| V \|_p \| u \|_r \leq \varepsilon \| \Delta u \| + C(\varepsilon) \| u \| . \tag{3.13}$$

□

Teorema 3.0.6 *Sea $V(x)$ un operador real, $V(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Si $p \geq n/2$ y $p \geq 2$ entonces $A_0 - iV$ es el generador infinitesimal de un grupo de operadores unitarios en $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. *Por el lema* (3.0.2) *se sabe que el operador iA_0 es simétrico y dado que V es un operador real, también es simétrico. Por lo tanto se sigue que $iA_0 + V$ es un operador simétrico. De acuerdo al teorema* (2.3.5)*, para demostrar que $iA_0 + V$ es auto-adjunto, es suficiente demostrar que $Im(iA_0 + V \pm iI) = L^2(\mathbb{R}^n)$ que es equivalente a demostrar que $Im(A_0 - iV \pm I) = L^2(\mathbb{R}^n)$ que a su vez es equivalente a demostrar que el operador $A_0 - iV$ es m-disipativo.*

Del corolario (3.0.3) *se tiene que A_0 es un generador infinitesimal, luego por el teorema de Lumer-Phillips A_0 es un operador m-disipativo para todo $x^* \in F(x)$. De la desigualdad* (3.13) *se sigue de manera inmediata que $D(A_0) \subset D(V)$, además para $t_0 = 0$ el operador $A_0 - t_0 iV$ es m-disipativo y por el lema* (3.0.5) *se tiene que*

$$\| Vx \| \leq \varepsilon \| A_0 x \| + C(\varepsilon) \| x \| \quad \textit{para } x \in D(A_0).$$

Ahora se mostrara el echo de que el operador $A_0 - tiV$ es disipativo para $0 \leq t \leq 1$, lo cual se debe a la m-disipatividad de A_0. En efecto,

$$Re((A_0 - tiV)x, x^*) = Re(A_0x, x^*) - Re(ti(Vx, x^*)), \tag{3.14}$$

y dado que $Vx \in X = L^2(\mathbb{R}^n)$*, por el teorema de Hanh-Banach, existe* $f \in X^*$ *tal que* $(Vx, f) = \parallel Vx \parallel$ *y* $\parallel f \parallel_* = 1$*. Luego tomando* $x^* = \parallel Vx \parallel f$ *satisface que* $(Vx, x^*) = \parallel Vx \parallel (Vx, f) = \parallel Vx \parallel^2$ *y* $\parallel x^* \parallel_* = \parallel Vx \parallel$*, es decir* x^* *esta el conjunto* $F(x)$*, además como*

$$Re(ti(Vx, x^*)) = Re(ti(Vx, \parallel Vx \parallel f)) = Re(ti \parallel Vx \parallel^2), \tag{3.15}$$

se concluye que $Re((A_0 - tiV)x, x^*) \leq 0$*. Por lo tanto se satisfacen las hipótesis del teorema de perturbación* (2.4.2)*, lo que implica que el operador* $A_0 - iV$ *es m-disipativo. Luego* $iA_0 + V$ *es auto-adjunto y por el teorema de Stone el operador* $A_0 - iV$ *es el generador infinitesimal de un grupo de operadores unitarios en el espacio* $L^2(\mathbb{R}^n)$*.*

$\square$

Finalmente, podemos establecer el resultado principal del presente trabajo.

Teorema 3.0.7 *Sea* $V(x)$ *satisfaciendo las hipótesis del teorema* (3.0.6)*. Entonces el problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = Au(t) \quad (t \in \mathbb{R}) \\ u(0) = f, \end{cases} \tag{3.16}$$

donde $A_0 = i\Delta$*,* $A = A_0 - iV$*, tiene una única solución* $u : \mathbb{R} \to L^2$*, para todo dato inicial* $f \in D(A) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$*, con* $D(A) = D(A_0) \cap D(V) = H^2(\mathbb{R})$*.*

Demostración. *Este resultado se tiene de manera inmediata de los teoremas* (1.4.11)*y* (3.0.6)*.*

Capítulo 4

Conclusiones

1. Los semigrupos de operadores continuos se introducen como soluciones de ecuaciones funcionales que satisfacen $f(s+t) = f(s)f(t)$, con $s, t \geq 0$, con el fin de proporcionar solución a ecuaciones diferenciales definidas en un espacio de Banach X, las cuales pueden ser ordinarias o parciales. Así, se establece una relación entre los semigrupos y las ecuaciones diferenciales lineales de tipo $u' = Au$, donde A es un operador lineal cerrado con dominio denso en el espacio.

2. Para el estudio del problema abstracto de Cauchy (1.11), el teorema de Hille-Yosida caracteriza a los generadores infinitesimales de semigrupos uniparamétricos fuertemente continuos de operadores lineales en espacios de Banach, estableciendo condiciones necesarias y suficientes para que un operador sea el generador de un C_0-semigrupo. Además, para los semigrupos de contracción se tiene el teorema de Lumer-Phillips, que permite determinar cuándo un operador disipativo genera un C_0-semigrupo. Si el operador A en (1.11) es acotado, por el teorema (1.3.6), $T(t)x = e^{tA}x$, es solución al problema abstracto de Cauchy.

3. El concepto de operador auto-adjunto, la teoría de semigrupos, el teorema de perturbación (2.4.2) y el teorema de Stone para grupos de operadores unitarios, permiten establecer la existencia y unicidad del problema de valor inicial asociado a la ecuación de Schrödinger no estacionaria con potencial variable, en donde la mayor dificultad en este problema surge de la dependencia de la función $V(x)$, que describe el potencial de la variable espacial x. En general, no se pueden deducir soluciones exactas de este problema para un potencial $V(x)$ arbitrario.

4. El trabajo se desarrolló bajo la idea principal de demostrar existencia y unicidad de la solución al problema (3.1), por lo cual no se entró en mayores consideraciones físicas acerca de la ecuación, por lo tanto, como una motivación para un trabajo futuro se pretende hacer un estudio sobre las soluciones que se pueden establecer para este problema empleando herramientas de análisis numérico.

Bibliografía

[1] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Applied Mathematical Sciences. 44. (1983).

[2] L.C. Evans. *Partial differential equations.* American Mathematical Society (1997).

[3] Stone, M. H, *On one-parameter unitary groups in Hilbert Space*, Annals of Mathematics, 33 (3): 643?648, (1932).

[4] Bryan P. Rynne, Martin A. Youngson. *Linear functional analysis.* Departament of Mathematics, Heriot-Watt University, Riccarton, Edimburg EH144AS, UK, (1958).

[5] Diego A. Tramuja. *Algunos teoremas fundamentales de las topologías débiles.* UNED. Barcelona, (2011).

[6] Gunter Lumer, R. S. Phillips. *Dissipative operators in a Banach space.* Pacific Journal of Mathematics. Vol. 11, No. 2, (1961).

[7] Felipe Linares,Gustavo Ponce. *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations.* Springer Science Business Media, LLC 2009.

[8] E. Schrödinger. *An Undulatory Theory of the Mechanics of Atoms and Molecules.* Physical Review. 28 (6): 1049-1070, (1926).

[9] Alastair I. M. Rae. *Quamtum Mechanics.* Departament of Physics University of Birmingham UK. Fourth edition, (2002).